



UNIVERSITÉ FRANÇOIS-RABELAIS
DE TOURS



*ÉCOLE DOCTORALE S. S. T.
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE THÉORIQUE*

THÈSE

présentée et soutenue par

Rodolphe GARBIT

le 20 octobre 2008

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'Université François-Rabelais, Tours**
Discipline : **Mathématiques**

**CONTRIBUTIONS À L'ÉTUDE D'UNE MARCHE
ALÉATOIRE CENTRIFUGE
ET
THÉORÈMES LIMITES POUR DES PROCESSUS
ALÉATOIRES CONDITIONNÉS**

THÈSE dirigée par :

M. LESIGNE Emmanuel

Professeur, université de Tours

M. PEIGNÉ Marc

Professeur, université de Tours

RAPPORTEURS :

M. CARMONA Philippe

Professeur, université de Nantes

M. ENRIQUEZ Nathanaël

Professeur, université de Paris X

JURY :

M. ABRAHAM Romain

Professeur, université d'Orléans

M. CARMONA Philippe

Professeur, université de Nantes

M. COULHON Thierry

Professeur, université de Cergy-Pontoise

M. ENRIQUEZ Nathanaël

Professeur, université de Paris X

M. LE PAGE Émile

Professeur, université de Bretagne-Sud

M. LESIGNE Emmanuel

Professeur, université de Tours

M. PEIGNÉ Marc

Professeur, université de Tours

Résumé Dans la première partie de cette thèse, nous étudions un modèle de marche aléatoire centrifuge. Nous démontrons une loi du logarithme itéré pour sa norme, et nous obtenons la loi asymptotique des fluctuations de sa direction. Nous donnons ensuite un encadrement du taux de décroissance exponentielle de la probabilité qu'elle se trouve à l'instant n dans un compact fixé en montrant que la probabilité qu'une marche aléatoire centrée classique retourne dans un compact à l'instant n sans quitter un cône ne décroît pas à vitesse exponentielle.

Dans la seconde partie, nous étudions le mouvement brownien de dimension quelconque, conditionné à rester dans un cône de révolution pendant une unité de temps, et nous en déduisons un principe d'invariance pour une marche aléatoire conditionnée à rester dans un cône.

Mots clés : Marche aléatoire centrifuge, mouvement brownien conditionné, théorèmes limite.

Abstract In the first part of this thesis, we study a model of centrifugal random walk. We prove a Law of Iterated Logarithm for its norm, and find the asymptotic law of the fluctuations of its direction. We then give upper and lower bounds for the exponential decay of the probability that the centrifugal random walk visits a fixed compact set at time n ; this is achieved by proving that the probability that a centered random walk visits a compact set at time n without having left a cone does not decrease exponentially.

In the second part, we study the multidimensional Brownian motion conditioned to stay in a circular cone for a unit of time, and derive an Invariance Principle for a random walk conditioned to stay in a circular cone.

Key words : Centrifugal random walk, conditioned Brownian motion, limit theorems.

Table des matières

Notations	7
Introduction	9
I Contributions à l'étude d'une marche aléatoire centrifuge	23
1 Présentation du modèle	25
1.1 Modèle élémentaire et hypothèses d'isotropie	25
1.2 Support de la marche centrifuge	27
1.3 Estimations de moments	31
2 Comportement en norme	33
2.1 Loi des grands nombres	33
2.2 Loi du logarithme itéré	34
2.3 Théorème limite central fonctionnel	36
3 Comportement en direction	39
3.1 Convergence de la direction	39
3.2 Théorème limite central pour l'angle en dimension deux	40
3.2.1 Angle de la marche centrifuge : définition et convergence	40
3.2.2 Quelques estimations	41
3.2.3 Démonstration du théorème limite central pour l'angle	44
3.3 Théorème limite central pour la direction	46
3.3.1 Quelques commentaires à propos de la dimension deux	47
3.3.2 De nouvelles estimations	47
3.3.3 Démonstration du théorème limite central pour la direction	48
4 Comportement global	51
4.1 Une conjecture	51
4.2 Un théorème limite central	52
5 Vers un théorème limite local	55
5.1 Transformée de Laplace	55
5.2 Encadrement du taux de décroissance de la probabilité de retour dans un compact	57
5.2.1 Majoration	58
5.2.2 Minoration	58
5.3 Cas d'égalité des bornes de l'encadrement ; théorème limite local	62

5.3.1	Marche centrifuge plane aux quatre plus proches voisins	62
5.3.2	Marches centrifuges de loi invariante par rotation	64
6	Sur le temps de sortie d'un cône pour une marche aléatoire	67
6.1	Introduction	67
6.2	Cône de sécurité	69
6.3	Probabilité de retour à une distance inférieure à la racine carrée du temps sans jamais quitter le cône	71
6.4	Probabilité de retour dans une boule sans jamais quitter le cône	73
6.5	À propos des constantes du théorème	75
6.6	Application au cas décentré	75
II	Théorèmes limites pour des processus aléatoires conditionnées à rester dans des cônes	77
7	Mouvement brownien conditionné à rester dans un cône	79
7.1	Mouvement brownien conditionné	81
7.1.1	Propriété de Markov	83
7.1.2	Probabilités de transition	84
7.1.3	Continuité à l'intérieur	86
7.1.4	Prolongement au bord	87
7.2	Le cas d'un demi-espace	94
7.2.1	Demi-droite et méandre brownien	94
7.2.2	Demi-espace et méandre brownien en dimension supérieure	98
7.2.3	Application à des ouverts « lisses »	99
7.3	Le cas d'un cône de révolution	107
7.3.1	Prolongement en dehors du sommet	107
7.3.2	Prolongement au sommet	108
8	Principe d'invariance pour des marches aléatoires conditionnées	117
8.1	Marche aléatoire et processus de Donsker conditionné	117
8.1.1	Quelques définitions et propriétés élémentaires	117
8.1.2	Propriété de Markov	119
8.1.3	Convergence à l'intérieur du cône	120
8.2	Le cas d'un demi-espace	120
8.2.1	La méthode de Bolthausen pour la dimension 1	121
8.2.2	Extension en dimension supérieure	124
8.2.3	Application aux bords localement linéaires	128
8.3	Cône quelconque	128
8.3.1	Énoncés des principaux résultats obtenus	129
8.3.2	La méthode de Shimura	130
8.3.3	Dans quels cas peut-on utiliser cette approche ?	134
	Annexes	139
A	Théorème limite central pour martingales	139
B	Convergence en loi de processus	141

C Minimum des fonctions convexes	143
Bibliographie	145

Remerciements

Je tiens d'abord à exprimer toute ma reconnaissance envers mes deux directeurs de thèse, Emmanuel Lesigne et Marc Peigné. Ils ont su patiemment aiguiller mes recherches, me proposer des pistes intéressantes, et m'ont toujours soutenu dans les moments de doutes. Je les remercie pour le temps qu'ils ont passé à lire et relire mes manuscrits, parfois obscurs, et pour celui passé à réfléchir aux questions que je leur posais. Je me remémore avec une pointe de nostalgie toutes les fois où je frappais à leur porte avec une « petite question de mathématique élémentaire » qui, généralement, nous occupait pendant quelques heures. . . Encore merci.

Je voudrais remercier ensuite Émile Le Page de m'avoir généreusement accueilli à Vannes pendant quelques jours. Les heures que nous avons passées à défricher certains travaux épineux de M. Shimura ont permis au chapitre sur le mouvement brownien conditionné de voir le jour.

Les deux rapporteurs de cette thèse, Philippe Carmona et Nathanaël Enriquez, ont pris de leur précieux temps pour lire minutieusement ce manuscrit et en rédiger un rapport. Je leur en suis profondément reconnaissant.

Je remercie vivement Romain Abraham, Thierry Coulhon et Émile Le Page d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je tiens aussi à remercier les doctorants et anciens doctorants du laboratoire, et tout particulièrement Xavier Thirion, pour la bonne humeur qui régnait dans nos bureaux. Mes remerciements vont aussi à Olivier Ley pour son aide sur quelques questions d'analyse. Je remercie également Anne-Marie Chesnais et Bernadette Vallée pour leur gentillesse désormais légendaire.

J'ai aussi une pensée toute particulière pour Étienne Sandier sans qui je n'aurais peut-être pas fait de mathématiques.

Ma famille et mes amis ont compris que j'étudie la marche d'un ivrogne qui essaie de fuir le commissariat au plus vite. Malgré cela, ils m'ont toujours soutenu. Je les remercie de leur confiance.

Enfin, je remercie Julie qui rend ma vie plus belle.

Notations

Avertissement : constante variable Dans les inégalités, les lettres κ , c ou C désignent des constantes réelles positives dont la valeur est susceptible de changer d'une ligne à l'autre.

Ensembles particuliers

- $B(x, r)$ ou $B^d(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\| < r\}$, boule ouverte de centre x et de rayon r .
- $B(x, r]$ ou $B^d(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\| \leq r\}$, boule fermée de centre x et de rayon r .
- \mathbb{B} ou $\mathbb{B}^d = B^d(0, 1)$, boule unité de \mathbb{R}^d .
- \mathbb{B}_r ou $\mathbb{B}_r^d = B^d(0, r)$.
- $S(x, r)$ ou $S^d(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\| = r\}$, sphère de centre x et de rayon r .
- \mathbb{S} ou $\mathbb{S}^d = S^d(0, 1)$, sphère unité de \mathbb{R}^d .
- \mathbb{S}_r ou $\mathbb{S}_r^d = S^d(0, r)$.
- $\mathcal{O}_r = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y\| \geq r\}$, couronne extérieure fermée.
- $\mathcal{O}_r^R = \{y \in \mathbb{R}^d : r \leq \|y\| \leq R\}$.

Inhabituelles mais efficaces

- $(x_n) \in (A_n)$, signifie que, pour tout n , $x_n \in A_n$.

Espace de fonctions

- C_t ou C_t^d , espace des fonctions continues sur l'intervalle $[0, t]$, à valeurs dans \mathbb{R}^d .
- C_∞ ou C_∞^d , espace des fonctions continues sur l'intervalle $[0, +\infty[$, à valeurs dans \mathbb{R}^d .
- Π_t , projection de C_∞ sur C_t par restriction : $\Pi_t(w) = w|_{[0, t]}$.
- X_t ou $X(t)$, fonctions coordonnées : $X_t(w) = w(t)$.
- θ_t , décalage temporel : $\theta_t(w)(s) = w(t + s)$.
- θ_τ , décalage temporel par un temps optionnel : $\theta_\tau(w)(s) = w(\tau(w) + s)$.

Écriture polaire Pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, on note $\vec{x} = x/\|x\|$ la projection du point x sur la sphère unité \mathbb{S}^{d-1} .

Abréviation Le TTC désigne indifféremment l'une ou l'autre des deux versions du théorème de la transformation continue qui sont présentées en annexe (théorèmes B.1 et B.2).

Terminologie Dans toute cette thèse, le terme « positif » est employé pour dire l'appartenance à l'ensemble $\mathbb{R}_*^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

Introduction

Cette thèse est composée de deux parties largement indépendantes que nous présentons ici dans leurs grandes lignes.

Partie I. Contributions à l'étude d'une marche aléatoire centrifuge

La marche aléatoire centrifuge a été introduite et étudiée par J.-D. Fouks, E. Lesigne et M. Peigné dans [13]. C'est une chaîne de Markov dans l'espace euclidien \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, dont les transitions sont celles d'une marche aléatoire symétrique, perturbées par une dérive centrifuge. Plus précisément, les probabilités de transition sont données par la relation

$$(1) \quad p(x, x + dy) = (1 + a(\|y\|)\langle \vec{x}, y \rangle)\mu(dy) =: \mu_{\vec{x}}(dy) \quad (\text{avec } \vec{x} = x/\|x\|),$$

où μ est une loi de probabilité sur \mathbb{R}^d , symétrique et à support borné, et a est une fonction positive convenablement choisie. La loi μ représente la loi de la marche non perturbée. Pour obtenir un comportement centrifuge, on impose aux lois $\mu(dy)$ et $a(\|y\|)\mu(dy)$ de satisfaire les conditions d'isotropie suivantes :

1. la matrice de covariance de $\mu(dy)$ est égale à $m'I$, $m' > 0$;
2. la matrice de covariance de $a(\|y\|)\mu(dy)$ est égale à mI , $m > 0$.

L'accroissement moyen partant d'un point $x \in \mathbb{R}^d$ est alors donné par

$$(2) \quad \int y \mu_{\vec{x}}(dy) = m\vec{x},$$

et la variance dans la direction \vec{u} vaut

$$(3) \quad \int \langle y - m\vec{x}, \vec{u} \rangle^2 \mu_{\vec{x}}(dy) = \begin{cases} m' & \text{si } \vec{u} \perp \vec{x} ; \\ m' - m^2 & \text{si } \vec{u} = \vec{x} . \end{cases}$$

L'équation (2) assure que l'accroissement est centrifuge en moyenne, tandis que l'équation (3) montre que la dispersion est plus importante sur l'hyperplan orthogonal à la direction de l'accroissement.

L'exemple le plus simple de ces marches aléatoires centrifuges est celui de la *marche centrifuge aux quatre plus proches voisins sur \mathbb{Z}^2* . Elle est obtenue en perturbant la marche simple aux quatre plus proches voisins sur \mathbb{Z}^2 , dont la loi μ est donnée par

$$\mu = \frac{1}{4}(\delta_{e_1} + \delta_{-e_1} + \delta_{e_2} + \delta_{-e_2}),$$

avec $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. La fonction de perturbation a est choisie constante, égale à un paramètre compris entre 0 et 1. Pour un point $x = (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{Z}^2$, les transitions aux quatre

plus proches voisins de x sont données par :

$$\begin{aligned} p(x, x + e_1) &= \frac{1}{4}(1 + a \cos \theta) ; \\ p(x, x - e_1) &= \frac{1}{4}(1 - a \cos \theta) ; \\ p(x, x + e_2) &= \frac{1}{4}(1 + a \sin \theta) ; \\ p(x, x - e_2) &= \frac{1}{4}(1 - a \sin \theta) . \end{aligned}$$

Les paramètres m' et m valent respectivement $1/2$ et $a/2$.

Notons $(X_n)_{n \geq 0}$ la chaîne de Markov à valeurs dans \mathbb{R}^d , issue de l'origine, associée aux transitions p définies par (1). Pour toute fonction mesurable bornée f sur \mathbb{R}^d , on a

$$\mathbb{E}(f(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n) = \int f(X_n + y)(1 + a(\|y\|)\langle \vec{X}_n, y \rangle) \mu(dy) ,$$

où $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \dots, X_n\}$ est la filtration naturelle associée à la suite (X_n) .

Nous noterons $\rho_n = \|X_n\|$ le module de la marche centrifuge et $\vec{X}_n = X_n/\rho_n$ la direction de la marche centrifuge (lorsqu'elle est définie).

Dans l'article [13], J-D. Fouks, E. Lesigne et M. Peigné étudient le comportement asymptotique en norme, puis en direction, de la marche centrifuge et obtiennent les résultats suivants :

Théorème 1 (Loi des grands nombres pour la norme). *Presque sûrement, pour tout $\epsilon > 0$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_n - nm}{n^{\frac{1}{2} + \epsilon}} = 0 .$$

Théorème 2 (Théorème limite central pour la norme). *La suite*

$$\left(\frac{\rho_n - nm}{\sqrt{n}} \right)$$

converge en loi vers une loi normale centrée de variance $m' - m^2$.

Théorème 3 (Convergence de la direction). *La suite des directions (\vec{X}_n) converge presque sûrement vers une direction limite \vec{X} .*

Théorème 4 (Support de la direction limite). *En dimension $d \geq 2$, le support de la loi de la direction limite \vec{X} est la sphère \mathbb{S}^{d-1} tout entière.*

Théorème 5 (Indépendance asymptotique de la norme et de la direction). *Le couple*

$$\left(\frac{\rho_n - nm}{\sqrt{n}}, \vec{X}_n \right)$$

converge en loi vers (U, \vec{X}) , où la variable U est indépendante de \vec{X} et suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, m' - m^2)$.

Les trois premiers théorèmes (1, 2 et 3) sont traités par des méthodes de martingales : la suite considérée est décomposée en une martingale à laquelle on applique des théorèmes classiques de convergence, et un reste dont on démontre qu'il est négligeable. Les deux théorèmes suivants (4 et 5) reposent sur un résultat de piégeage de la marche centrifuge dans des cônes de petite ouverture.

Notre contribution à l'étude de la marche centrifuge peut être classée selon les sujets suivants :

Comportement de la norme En utilisant les mêmes méthodes de martingales, nous complétons la panoplie des résultats « classiques » :

Théorème 2.2 (Loi du logarithme itéré pour le module). *Presque sûrement,*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_n - nm}{\sqrt{2n(m' - m^2) \log \log n}} = +1 .$$

Pour tout $n \geq 1$, notons $\Gamma_n(t)$ le processus sur \mathcal{C}_1 valant

$$\frac{\rho_k - km}{\sqrt{n(m' - m^2)}}$$

aux instants $t = k/n$ et interpolé linéairement ailleurs.

Théorème 2.6 (Principe d'invariance pour le module). *La suite de processus (Γ_n) converge en loi vers le mouvement brownien.*

Comportement de la direction En affinant les estimations utilisées pour démontrer le théorème 3 de convergence de la direction, nous obtenons une vitesse de convergence :

Théorème 3.1. *Presque sûrement, pour tout $\epsilon > 0$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2} - \epsilon} (\vec{X} - \vec{X}_n) = 0 .$$

Cette vitesse de convergence est optimale puisque nous démontrons que la suite

$$\left(n^{\frac{1}{2}} (\vec{X} - \vec{X}_n) \right)$$

converge en loi quand n tend vers l'infini. Nous avons d'abord étudié le cas de la dimension 2 où cette question devient un problème d'angle, donc essentiellement unidimensionnel. Nous appelons *angle* d'un vecteur $\vec{u} \in \mathbb{S}^1$ tout nombre réel θ tel que $\vec{u} = e^{i\theta}$, où le cercle \mathbb{S}^1 est identifié avec le groupe des nombres complexes de module 1. On définit par récurrence la suite (θ_n) des angles de la marche aléatoire, trajectoire par trajectoire, en choisissant pour $\theta_{n+1}(\omega)$ l'unique angle de \vec{X}_{n+1} appartenant à l'intervalle $[\theta_n(\omega) - \pi, \theta_n(\omega) + \pi[$. Avec ce choix, les accroissements $\theta_{n+1} - \theta_n$ sont comparables aux accroissements $\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n$, et l'on en déduit que la suite (θ_n) converge presque sûrement vers un angle limite θ . En utilisant des méthodes de martingales, nous obtenons :

Théorème 3.7. *La suite*

$$\left(n^{\frac{1}{2}} (\theta - \theta_n) \right)$$

converge en loi vers une gaussienne $\mathcal{N}(0, \frac{m'}{m^2})$.

Lorsque la dimension est plus grande ($d \geq 3$), il n'est plus possible de se ramener à un problème unidimensionnel. On peut néanmoins traiter directement la suite des directions (\vec{X}_n) à l'aide de théorèmes limites pour des martingales dont la variance conditionnelle possède un équivalent qui n'est pas déterministe. En utilisant de tels outils, nous avons obtenu le théorème suivant :

Théorème 3.10. *La suite*

$$\left(n^{\frac{1}{2}} (\vec{X} - \vec{X}_n) \right)$$

converge en loi vers une variable Y dont la fonction caractéristique ϕ est donnée par

$$(4) \quad \phi(t) = \mathbb{E}(e^{-\frac{1}{2} \langle t, \Gamma t \rangle}) ,$$

où Γ est la matrice aléatoire dont les coefficients γ_{ij} sont donnés par $\gamma_{ij} = \frac{m'}{m^2} (\delta_{ij} - \vec{X}^i \vec{X}^j)$.

Restait à interpréter géométriquement la loi de Y . Et c'est là que le résultat obtenu en dimension 2 s'est révélé utile. Pour x assez petit, on a $e^{ix} \cong 1 + ix$, donc $e^{i(\theta_n - \theta)} - 1 \cong i(\theta_n - \theta)$, ou encore $e^{i\theta_n} - e^{i\theta} \cong i(\theta_n - \theta) e^{i\theta}$. En termes de vecteurs, cette relation se traduit par

$$n^{\frac{1}{2}}(\vec{X}_n - \vec{X}) \cong n^{\frac{1}{2}}(\theta_n - \theta) R(\vec{X}),$$

où R est la rotation d'angle $\pi/2$. De là à penser que l'expression précédente converge en loi vers la variable $\rho R(\vec{X})$, où ρ est une variable de loi $\mathcal{N}(0, \frac{m'}{m^2})$ indépendante de \vec{X} , il n'y a qu'un pas qu'un calcul permet de franchir : la fonction caractéristique de $\rho R(\vec{X})$ est bien donnée par la formule (4) ! Cela se généralise de la façon suivante. Donnons-nous :

- une famille $\{(e_1(\vec{u}), e_2(\vec{u}), \dots, e_d(\vec{u})) : \vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}\}$ de bases orthonormées de \mathbb{R}^d telles que $e_1(\vec{u}) = \vec{u}$;
- des variables aléatoires $\rho_2, \rho_3, \dots, \rho_d$ de loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{m'}{m^2})$ telles que $\rho_2, \rho_3, \dots, \rho_d$ et \vec{X} soient mutuellement indépendantes.

Alors ϕ est la fonction caractéristique du vecteur $Y = \rho_2 e_2(\vec{X}) + \rho_3 e_3(\vec{X}) + \dots + \rho_d e_d(\vec{X})$.

Comportement global Compte tenu des théorèmes 1, 3 et 3.1, l'identité

$$X_n - nm\vec{X} = (\rho_n - nm)\vec{X}_n + nm(\vec{X}_n - \vec{X})$$

implique

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n - nm\vec{X}}{n^{\frac{1}{2} + \epsilon}} = 0 \quad \text{p. s.,}$$

quel que soit $\epsilon > 0$. Nous nous sommes intéressés au cas où ϵ est pris égal à 0, mais les méthodes de martingales utilisées jusqu'à présent se sont révélées inefficaces : la différence entre la partie martingale et la suite de départ n'est pas négligeable. Étant donnés les théorèmes 2, 3 et 3.10, on s'attend néanmoins à la convergence en loi suivante :

Conjecture 4.1. *La suite*

$$\left(\frac{X_n - nm\vec{X}}{\sqrt{n}} \right)$$

converge en loi vers la variable

$$Z = \rho_1 \vec{X} + \rho_2 e_2(\vec{X}) + \dots + \rho_d e_d(\vec{X}),$$

où ρ_1 suit une loi $\mathcal{N}(0, m' - m^2)$, ρ_2, \dots, ρ_d suivent la loi $\mathcal{N}(0, m')$, et les variables $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_d$ et \vec{X} sont mutuellement indépendantes.

Notez que les variances des coordonnées $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_d$ correspondent bien à celles qu'on attend au vu de l'identité (3).

La variable Z apparaît dans un autre théorème limite central. Il y a en fait une martingale qui s'obtient très naturellement à partir de la suite (X_n) : d'après l'équation (2), on a

$$\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) = m\vec{X}_n,$$

ce qui signifie que la suite $(X_{n+1} - X_n - m\vec{X}_n)$ est une suite d'accroissements de martingale. En appliquant un théorème limite central directement à la martingale qui possède ces accroissements, on obtient :

Théorème 4.2. *La suite*

$$\left(\frac{X_n - m \sum_{k=1}^{n-1} \vec{X}_k}{\sqrt{n}} \right)$$

converge en loi vers la variable

$$Z = \rho_1 \vec{X} + \rho_2 e_2(\vec{X}) + \dots + \rho_d e_d(\vec{X}) .$$

Ce théorème est l'un des plus faciles à obtenir parce qu'il s'agit d'une vraie martingale et qu'il n'y a donc pas de reste à estimer. Malheureusement, il ne permet ni de confirmer ni d'infirmer la conjecture.

Premier pas vers un théorème limite local La question d'un théorème limite local pour la marche centrifuge est posée dans [13]. Il s'agit de déterminer un équivalent, lorsque n tend vers l'infini, de la probabilité pour que la marche centrifuge se trouve à l'instant n dans une partie bornée K de l'espace. Les auteurs de l'article soulignent qu'ils savent déjà que

$$\mathbb{P}(X_n \in K) \leq C \rho^n ,$$

où $\rho \in]0, 1[$ et C sont deux constantes. On doit donc s'attendre à un équivalent dont le terme principal est exponentiel. Un premier pas vers le théorème limite local consiste alors à préciser le *taux de décroissance exponentielle*, c'est-à-dire la limite (lorsqu'elle existe) de la suite de terme général

$$\mathbb{P}(X_n \in K)^{1/n} .$$

Pour tout $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$, notons $L_{\vec{u}}$ la transformée de Laplace de la loi $\mu_{\vec{u}}$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par

$$L_{\vec{u}}(x) = \int e^{\langle x, y \rangle} \mu_{\vec{u}}(dy) .$$

Il est démontré dans l'article [13] que, pour tout $\lambda > 0$, le maximum en $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$ de la quantité $L_{\vec{u}}(-\lambda \vec{u})$ majore la transformée de Laplace $\mathbb{E}(e^{t \rho_n})$ du module de la marche centrifuge évaluée en $t = -\lambda$. Un argument classique permet d'en déduire que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in K)^{1/n} \leq \inf_{\lambda > 0} \max_{\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}} L_{\vec{u}}(-\lambda \vec{u}) .$$

Les auteurs démontrent par ailleurs que ce majorant est < 1 . Il ne restait donc plus qu'à trouver un bon minorant de la limite inférieure de $\mathbb{P}(X_n \in K)^{1/n}$.

L'idée générale de notre approche est la suivante : si la marche centrifuge (X_n) reste dans un cône de direction \vec{u} et de petite ouverture, alors les lois $\mu_{\vec{X}_n}$ des accroissements restent proches de la loi $\mu_{\vec{u}}$, et la marche centrifuge a un comportement qui est proche de celui d'une vraie marche aléatoire de loi $\mu_{\vec{u}}$ qui reste dans ce même cône. En utilisant le procédé de relativisation de Cramer, on arrive *grosso modo* à la minoration

$$\mathbb{P}(X_n \in K) \geq \left(\inf_{x \in \mathbb{S}^{d-1}} L_{\vec{u}}(x) \right)^n \mathbb{P}(S_n \in K; T_C(S_n) > n) ,$$

où C est le cône dont il était question, T_C le temps de sortie de C , défini pour toute suite $(x_n) \in \mathbb{R}^d$ par $T_C(x_n) = \inf\{k \geq 1 : x_k \notin C\}$, et (S_n) une marche aléatoire centrée.

Se pose alors la question du comportement asymptotique de la quantité $\mathbb{P}(S_n \in K; T_C(S_n) > n)$. Ce comportement était déjà connu pour certaines lois, mais il n'existait aucun résultat général. Nous

étudions cette quantité au chapitre 6 et démontrons qu'elle ne décroît pas exponentiellement vite vers 0.

On obtient alors le théorème suivant :

Théorème 5.6. *Pour toute partie bornée et accueillante¹ $K \subset \mathbb{R}^d$, on a*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in K)^{1/n} \geq \sup_{\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}} \inf_{x \in \mathbb{R}^d} L_{\vec{u}}(x).$$

L'encadrement ainsi obtenu permet de répondre positivement à la question de l'existence d'un taux de décroissance exponentielle à condition que les deux bornes soient égales, c'est-à-dire

$$\sup_{\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}} \inf_{x \in \mathbb{R}^d} L_{\vec{u}}(x) = \inf_{\lambda > 0} \max_{\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}} L_{\vec{u}}(-\lambda \vec{u}).$$

Nous avons pu démontrer que cette égalité a lieu dans deux cas particuliers :

Théorème 5.8. *Pour la marche centrifuge plane aux quatre plus proches voisins, de paramètre $a \in [0, 1]$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in K)^{1/n} = \sqrt{\frac{2-a^2}{2}},$$

quelle que soit la partie $K \subset \mathbb{Z}^2$ bornée et contenant au moins deux points (x, y) et (x', y') de \mathbb{Z}^2 distincts de l'origine et tels que $x + y$ et $x' + y'$ aient une parité différente².

Théorème 5.9. *Pour toute marche centrifuge dont la loi non perturbée μ est invariante par les rotations vectorielles, les bornes de l'encadrement sont égales et valent*

$$\inf_{\lambda > 0} L_{\vec{u}}(-\lambda \vec{u}),$$

quel que soit $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Temps de sortie d'un cône pour une marche aléatoire Ce chapitre a fait l'objet d'une note publiée aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences [14].

Soit \mathcal{L} une loi de probabilité sur \mathbb{R}^d et soit Ω l'ensemble des suites $(\xi_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^d$ muni de sa tribu borélienne et de la famille de mesures probabilités $(\mathbb{P}_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$, où $\mathbb{P}_x = \delta_x \otimes \mathcal{L}^{\otimes \mathbb{N}}$ (δ_x est la mesure de Dirac en x). Sous \mathbb{P}_x , les variables $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \dots$ sont indépendantes, $\xi_0 = x$ et $\xi_1, \xi_2 \dots$ suivent la loi \mathcal{L} . Nous notons $(S_n)_{n \geq 0}$ la marche aléatoire associée (*i.e.* $S_n = \xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n$).

On fixe un cône C , convexe et d'intérieur non vide, ayant son sommet en l'origine et on considère le temps de sortie T_C du cône C défini par

$$T_C = \inf\{n \geq 1 : S_n \notin C\}.$$

La recherche d'un équivalent de la quantité $\mathbb{P}_x(T_C > n)$ lorsque n tend vers l'infini (pour un $x \in C$ fixé) est un sujet ancien qui a fait l'objet de nombreux travaux. Un premier résultat obtenu par F. Spitzer ([31], Theorem 3.5) en dimension 1 pour $C =]0, +\infty[$, et désormais classique, dit que $\mathbb{P}_0(T_C > n)$ est équivalent à $cn^{-1/2}$ lorsque la loi \mathcal{L} est apériodique, centrée, et possède un moment d'ordre 2. En fait, on sait précisément que $\mathbb{P}_0(T_C = n)$ est équivalent à $(c/2)n^{-3/2}$

1. La notion d'ensemble accueillant est définie au chapitre correspondant ; ne considérer que de tels ensembles est une précaution qui permet de rendre rigoureux le raisonnement que nous avons esquissé.
2. Ce sont les parties accueillantes de \mathbb{Z}^2 pour la marche centrifuge plane aux quatre plus proches voisins.

(Borovkov [4], Corollary 9), et c'est grâce à cette estimation que D. Iglehart a pu donner la première démonstration du principe d'invariance pour une marche aléatoire conditionnée à rester positive ([18]). La démonstration que donne F. Spitzer du premier résultat utilise la factorisation de Wiener-Hopf; par les mêmes méthodes, D. Iglehart démontre³ que la quantité $\mathbb{E}_0(\phi(S_n); T_C > n)$ (où ϕ est une fonction de la variable réelle à support compact) est équivalente à $cn^{-3/2}$. Ce résultat intervient de façon essentielle pour l'obtention d'un théorème limite local sur le groupe affine de la droite réelle ([21]) ou dans l'étude des probabilités d'extinction de processus de branchement en milieu aléatoire ([15]). Des résultats du même ordre existent en dimension supérieure lorsque C est un demi-espace; ils permettent par exemple d'obtenir un théorème limite local pour les marches aléatoires centrées sur le groupe des matrices triangulaires supérieures d'ordre 2 ([22]). Des travaux plus récents, dus à N. Varopoulos [33], montrent qu'en toute dimension $\mathbb{E}_x(\phi(S_n); T_C > n)$ décroît à vitesse polynomiale vers 0 lorsque des hypothèses convenables⁴ sont faites sur la loi \mathcal{L} et la position du cône (qui doit être adaptée à la loi \mathcal{L}).

L'intérêt que nous portons à ces résultats est dû à la méthode que nous employons pour minorer la probabilité pour que la marche centrifuge se trouve dans une partie bornée de l'espace à l'instant n . Comme nous l'avons expliqué dans le paragraphe traitant de cette question, pour minorer le taux de décroissance exponentielle de la marche centrifuge, il suffit de démontrer que la quantité $\mathbb{P}_x(S_n \in K; T_C > n)$ ne décroît pas à vitesse exponentielle vers 0 lorsque (S_n) est une marche de loi \mathcal{L} , centrée et à support borné. Le résultat requis n'a pas besoin d'être aussi précis que ceux que nous avons cités plus haut, mais il doit être valable sous des hypothèses beaucoup plus générales.

Ayant cela à l'esprit, nous avons obtenu le résultat qui suit.

On suppose que la loi \mathcal{L} des accroissements possède une moyenne μ et une matrice de covariance définie positive. Nous fixons une direction \vec{u} intérieure au cône C et notons $C_\delta = \delta\vec{u} + C$ le cône C translaté par $\delta\vec{u}$.

Théorème 6.1. *Si $\mu = 0$, alors il existe deux nombres réels positifs R_0 et δ tels que pour tout compact $K \subset C_\delta$ on ait*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{x \in K} \mathbb{P}_x(\|S_n\| \leq R_0; T_C > n)^{1/\sqrt{n}} > 0.$$

Les constantes δ et R_0 dépendent de la loi \mathcal{L} et du cône C et peuvent être interprétées de la façon suivante :

- pour que la marche puisse rester dans le cône pendant un certain temps, il peut être nécessaire qu'elle soit issue d'un point suffisamment éloigné du bord de C : le cône translaté C_δ joue le rôle d'un cône de sécurité. Si la marche issue de 0 reste dans C et atteint son intérieur à l'instant n avec une probabilité positive, c'est-à-dire si $\mathbb{P}_0(S_n \in C^\circ; T_C > n) > 0$, alors le résultat du théorème est vrai avec $\delta = 0$.
- il se peut que la marche ne puisse pas s'approcher trop près de l'origine sans quitter le cône; cela justifie l'existence d'une distance critique R_0 .

La démonstration du théorème 6.1 ne fait appel qu'à des outils très classiques du Calcul des Probabilité, dont le plus sophistiqué est le Principe d'invariance de Donsker. Afin d'en donner une

3. Pour être tout à fait précis, D. Iglehart s'intéresse dans [19] à une marche aléatoire de moyenne négative avec des moments exponentiels; il démontre que la quantité $\mathbb{P}(S_n \in K; T_C > n)$ décroît en $n^{-3/2}\rho^n$, où ρ est le minimum de la transformée de Laplace de la loi des accroissements. Dans [21], E. Le Page et M. Peigné lui attribuent cependant le résultat pour une marche centrée et montrent comment celui-ci s'obtient à l'aide des méthodes développées par D. Iglehart.

4. N. Varopoulos étudie d'abord le cas où \mathcal{L} est à support borné, portée par un réseau ou absolument continue, puis étend ses résultats à une classe particulière de lois ayant un support non borné et des moments d'ordre grand (cf. [33], section 6.2). Le cône doit se trouver en *position générale* relativement à la loi \mathcal{L} (cf. [33], section 0.7).

idée assez précise, voyons par exemple comment nous démontrons que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0(T_C > n)^{1/\sqrt{n}} > 0 ,$$

lorsqu'il existe un point z à l'intérieur du cône tel que $\mathbb{P}_0(\xi_1 = z) > 0$. On commence par minorer $\mathbb{P}_0(T_C > n)$ en ne considérant que les trajectoires de la marche dont les $[\sqrt{n}]$ premiers pas sont égaux à z ; en utilisant l'indépendance et la stationnarité des accroissements, on obtient

$$\mathbb{P}_0(T_C > n) \geq (\mathbb{P}_0(\xi_1 = z))^{\sqrt{n}} \mathbb{P}_0([\sqrt{n}]z + S_k \in C, k = 1 \dots k_n) ,$$

où $k_n = n - [\sqrt{n}]$. On utilise ensuite le fait que le cône est invariant par changement d'échelle et convexe pour récrire le dernier terme de droite sous la forme

$$\mathbb{P}_0(\gamma_n z + \mathcal{S}_{k_n}(t) \in C, \forall t \in]0, 1]) ,$$

où $\gamma_n = [\sqrt{n}]/k_n$ et $\{\mathcal{S}_n(t), t \geq 0\}$ est le processus à trajectoires continues valant S_k/n aux instants $t = k/n$ et interpolé linéairement ailleurs. Grâce au principe d'invariance de Donsker, qui stipule que \mathcal{S}_n converge en loi vers le mouvement brownien B issu de 0, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0(\gamma_n z + \mathcal{S}_{k_n}(t) \in C, \forall t \in]0, 1]) = \mathbb{P}_0(z + B(t) \in C, \forall t \in]0, 1]) ;$$

et comme z est à l'intérieur de C , cette limite est positive. Il s'ensuit alors que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0(T_C > n)^{1/\sqrt{n}} \geq \mathbb{P}_0(\xi_1 = z) .$$

Avec le même argumentaire, on peut aussi démontrer que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0(\|S_n\| \leq \sqrt{n}; T_C > n)^{1/\sqrt{n}} \geq \mathbb{P}_0(\xi_1 = z) .$$

Le théorème 6.1 s'en déduit par une comparaison entre les quantités $\mathbb{P}_0(\|S_n\| \leq \sqrt{n}; T_C > n)$ et $\mathbb{P}_0(\|S_n\| \leq R; T_C > n)$.

Le procédé de relativisation de Cramer permet de déduire facilement du théorème 6.1 le corollaire suivant :

Corollaire 6.2. *Si $\mu \neq 0$ et si la loi \mathcal{L} possède tous les moments exponentiels, alors il existe deux nombres réels positifs R_0 et δ tels que pour tout point $x \in C_\delta$ on ait*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_x(\|S_n\| \leq R_0; T_C > n)^{1/n} = \rho_{\mathcal{L}} ,$$

où $\rho_{\mathcal{L}}$ est le minimum de la transformée de Laplace de la mesure \mathcal{L} .

Notons que la limite apparaissant dans l'énoncé précédent ne dépend pas du cône choisi.

Partie II. Théorèmes limites pour des processus aléatoires conditionnés à rester dans des cônes

Cette partie est consacrée à l'obtention de théorèmes de convergence en loi pour les processus suivants :

1. le mouvement brownien issu d'un point x à l'intérieur d'un cône C et conditionné à rester dans ce cône pendant une unité de temps; nous étudions la convergence en loi de ce processus lorsque x tend vers le sommet du cône;
2. une marche aléatoire centrée, convenablement normalisée, et conditionnée à rester dans un cône jusqu'à l'instant n ; nous étudions la convergence en loi lorsque n tend vers l'infini.

Le second cas peut être considéré comme l'analogie discret du premier, et il n'est pas surprenant que la limite apparaissant dans ces deux cas soit la même. Dans les deux paragraphes suivants, nous présentons les résultats que nous avons obtenus et leurs liens avec des travaux antérieurs.

Mouvement brownien conditionné Dans ce qui suit, $d \geq 1$ est un entier fixé. Soit \mathcal{C}_∞ l'espace des fonctions continues $w : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^d$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, et soit $\{X(t), t \geq 0\}$ le processus canonique de \mathcal{C}_∞ (pour tout $w \in \mathcal{C}_\infty$, $X(t)(w) = w(t)$). Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on note W_x la loi sur \mathcal{C}_∞ du mouvement brownien issu de x . Soit $C \subset \mathbb{R}^d$ un cône de révolution de sommet 0, ouvert et convexe, et soit $\tau_C = \inf\{t > 0 : X_t \notin C\}$ le temps de sortie de C . Pour tout $x \in C$ et $t > 0$, on définit la loi $\widetilde{W}_{x,t}^C$ du mouvement brownien issu de x et conditionné à rester dans C jusqu'à l'instant t en posant

$$\widetilde{W}_{x,t}^C(A) = \frac{W_x(A; \tau_C > t)}{W_x(\tau_C > t)},$$

quel que soit $A \in \mathcal{C}_\infty$.

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant :

Théorème 7.42. *Lorsque $x \in C$ tend vers 0, la loi $\widetilde{W}_{x,1}^C$ converge étroitement (sur \mathcal{C}_∞) vers une loi limite $\widetilde{W}_{0,1}^C$.*

Ce théorème étend en dimension supérieure les résultats précédemment obtenus par R. Durrett, D. Iglehart et D. Miller ([10]) en dimension 1, et par M. Shimura ([28]) en dimension 2.

Dans le cas de la dimension 1 avec $C =]0, +\infty[$, l'existence d'une limite est démontrée directement en identifiant la loi conditionnelle avec celle d'une section du mouvement brownien. Plus précisément, les auteurs introduisent le temps aléatoire T_x défini par

$$T_x = \inf\{t \geq 0 : X_t = x \text{ et } X_s > 0, \forall s \in]t, t+1]\},$$

(qui est W_0 -presque sûrement fini) et démontrent que

$$\widetilde{W}_{x,1}^C(*) = W_0(X(T_x + \cdot) \in *).$$

Il leur suffit alors de vérifier que T_x converge presque sûrement vers T_0 pour obtenir le théorème 7.42 ; la loi limite est donnée par la relation $\widetilde{W}_{0,1}^C(*) = W_0(X(T_0 + \cdot) \in *)$. En calculant les transitions limites, ils démontrent que cette loi est celle du *méandre brownien* qui se définit habituellement, sous W_0 , par la transformation des trajectoires

$$X^*(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\sigma}} |X(\sigma + (1-\sigma)t)|,$$

où $\sigma = \sup\{t \leq 1 : X_t = 0\}$ est le temps du dernier retour en 0 avant l'instant 1.

En dimension supérieure, leur méthode permet évidemment de traiter le cas où C est un demi-espace, mais est inadaptée aux autres cas ; nous y reviendrons dans le paragraphe consacré aux marches aléatoires conditionnées.

Notre démonstration du théorème 7.42 en dimension $d \geq 2$ s'inspire largement de celle qu'en donne M. Shimura en dimension 2 et suit le schéma habituel :

1. convergence des lois fini-dimensionnelles ;
2. tension.

Convergence des lois fini-dimensionnelles La convergence des lois fini-dimensionnelles se déduit de la convergence des lois de première transition, c'est-à-dire des lois $\widetilde{W}_{x,1}^C(X_t \in dy)$ ($t \in]0, 1]$) lorsque $x \in C$ tend vers 0. Ces lois possèdent toutes une densité par rapport à la mesure de Lebesgue

qui s'exprime en fonction des transition $p^C(t, x, y)$ du mouvement brownien tué à la sortie de C par la formule

$$\widetilde{W}_{x,1}^C(X_t \in dy) = p^C(t, x, y) \frac{W_y(\tau_C > 1-t)}{W_x(\tau_C > 1)} dy .$$

Nous déterminons la densité limite en calculant un équivalent du noyau de la chaleur $p^C(t, x, y)$, lorsque x tend vers 0, grâce au développement en série qu'en donnent R. Bañuelos et R. Smits dans [1]. Bien que la formule pour le noyau de la chaleur d'un cône du plan fût connue depuis 1959 (cf. [8], p. 379) M. Shimura n'en fait pas usage ; il reformule le problème en terme de processus d'Ornstein-Uhlenbeck tué dont il parvient à calculer les transitions.

Tension Pour démontrer la tension⁵ de la famille de lois $\{\widetilde{W}_{x,1}^C : x \in C\}$ lorsque $x \in C$ tend vers 0, nous reprenons une idée de prolongement due à M. Shimura selon laquelle il suffit de démontrer que cette famille est tendue lorsque $x \in C$ tend vers n'importe quel autre point du bord de C . En dimension 2, pour un point $x_0 \neq 0$ appartenant au bord de C , il est assez facile de déduire de la version unidimensionnelle du théorème 7.42 que $(\widetilde{W}_{x_n,1}^C)$ converge (et est donc tendue) lorsque $x_n \in C$ tend vers x_0 , car C est localement un demi-espace en x_0 . Mais en dimension $d \geq 3$, la géométrie du bord d'un cône n'est plus aussi simple, et cela nous a amené à reconsidérer le problème dans un cadre plus général.

Sans entrer dans tous les détails, on remplace le cône C par un ouvert U contenu dans le demi-espace $D = \{x = (x_1, \dots, x_d) : x_1 > 0\}$ et dont le bord contient 0, et l'on étudie la convergence des lois $\widetilde{W}_{x,1}^U$ lorsque $x \in U$ tend vers 0. Pour tout $x \in U$, on a la relation suivante :

$$(5) \quad \widetilde{W}_{x,1}^U(*) = \frac{\widetilde{W}_{x,1}^D(*; \tau_U > 1)}{\widetilde{W}_{x,1}^D(\tau_U > 1)} .$$

En utilisant la version unidimensionnelle du théorème 7.42, on démontre que les lois $\widetilde{W}_{x,1}^D$ convergent vers une loi $\widetilde{W}_{0,1}^D$, que l'on appellera D -méandre brownien, sous laquelle les coordonnées du processus canonique (X_1, X_2, \dots, X_d) sont indépendantes et X_1 (resp. X_2, \dots, X_d) est un méandre brownien (resp. mouvement brownien). Si U est suffisamment lisse en 0, on peut espérer que le D -méandre brownien reste pendant une unité de temps dans U avec une probabilité positive, c'est-à-dire que $\widetilde{W}_{0,1}^D(\tau_U > 1) > 0$. Supposons que U ait cette propriété et qu'en plus on puisse appliquer un théorème du type Portemanteau au numérateur et au dénominateur du membre de droite de l'équation (5). On en déduirait alors que

$$\lim_{x \in U \rightarrow 0} \widetilde{W}_{x,1}^U(*) = \frac{\widetilde{W}_{0,1}^D(*; \tau_U > 1)}{\widetilde{W}_{0,1}^D(\tau_U > 1)} .$$

Des conditions suffisantes pour exploiter cet argument sont données dans la proposition suivante :

Proposition 7.23. *On suppose que U est un ouvert co-régulier⁶. On a :*

1. si $\widetilde{W}_{0,1}^D(\tau_U > 0) = 1$, alors $\widetilde{W}_{0,1}^D(\tau_U > 1) > 0$;
2. si $(x_n) \in U$ est une suite convergeant vers 0 telle que

$$(6) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \widetilde{W}_{x_n,1}^D(\tau_U \leq s) = 0 ,$$

alors la suite de mesures $\widetilde{W}_{x_n,1}^D(*; \tau_U > 1)$ converge vers $\widetilde{W}_{0,1}^D(*; \tau_U > 1)$.

5. Nous disons que la famille de lois $\{\widetilde{W}_{x,1}^C : x \in C\}$ est tendue lorsque $x \in C$ tend vers 0 si, pour toute suite $(x_n) \in C$ convergeant vers 0, la suite $(\widetilde{W}_{x_n,1}^C)_n$ est tendue.

6. voir le chapitre correspondant.

Si les deux conditions sont réunies, alors la suite $(\widetilde{W}_{x_n,1}^U)$ converge vers $\widetilde{W}_{0,1}^U := \widetilde{W}_{0,1}^D(* | \tau_U > 1)$.

Dans [6], K. Burdzy obtient un critère qui permet de décider, selon la régularité du bord de U en 0, si $\widetilde{W}_{0,1}^D(\tau_U > 0) = 1$ ou 0 (le même critère est découvert indépendamment par M. Shimura dans [27], mais seulement en dimension 2). Nous insistons seulement sur le fait que ce critère suffit à démontrer que $\widetilde{W}_{0,1}^D(\tau_U > 1) > 0$ lorsque U contient une boule qui est tangente au bord de D en 0. La condition (6) est quant à elle une hypothèse technique *ad hoc* permettant de compenser la forte irrégularité de τ_U , mais qui est loin d'être une condition nécessaire : elle n'a aucune chance d'être vérifiée si, par exemple, la suite (x_n) longe le bord de U . En utilisant un argument de nature géométrique, nous sommes cependant parvenus à démontrer que cette condition est vérifiée lorsque $U = \mathbb{B}$ est une boule de rayon $r > 0$ centrée en re_1 et que la suite (x_n) est portée par le demi-axe $\{\lambda e_1 : \lambda > 0\}$.

Ces résultats, bien que partiels, permettent de résoudre le problème initial. Considérons de nouveau un cône convexe C de sommet 0 et un point $x_0 \neq 0$ appartenant au bord de C . Si C contient une boule \mathbb{B} dont le bord est tangent au bord de C en x_0 , alors la suite $\widetilde{W}_{x,1}^C$ converge lorsque x tend vers x_0 le long du rayon joignant le centre de la boule \mathbb{B} à x_0 . Lorsque C est un cône de révolution, l'invariance du problème par rotation autour de l'axe de C et par homothétie font que l'on peut toujours se ramener au cas précédent. Nous obtenons donc :

Théorème 7.34. *Soit $C \subset \mathbb{R}^d$ un cône de révolution convexe de sommet 0. Pour tout point $x_0 \neq 0$ du bord de C et toute suite $(x_n) \in C$ convergeant vers x_0 , la suite $(\widetilde{W}_{x_n,1}^C)$ est convergente (donc tendue).*

Comme nous l'avons mentionné plus tôt, cela suffit à démontrer la tension de la suite $(\widetilde{W}_{x_n,1}^C)$ lorsque $x_n \in C$ tend vers 0 et complète donc la démonstration du théorème 7.42.

Marche aléatoire conditionnée L'étude que nous menons dans cette seconde partie trouve son origine dans une série d'articles ([27],[28],[29]) que M. Shimura a publiés dans les années quatre-vingt. Il y étudie des marches aléatoires dans le plan, conditionnées à rester dans des cônes, et l'analogue « continu », à savoir le mouvement brownien plan conditionné à rester dans un cône pendant une unité de temps. Pour bien comprendre les travaux de M. Shimura, il nous faut revenir un peu en arrière.

L'histoire commence en 1960, lorsque F. Spitzer parvient à calculer un équivalent de la probabilité pour qu'une marche aléatoire centrée reste positive jusqu'à l'instant n . Soit $(S_n)_{n \geq 0}$ une marche aléatoire réelle dont les accroissements (indépendants et identiquement distribués) $\xi_n = S_n - S_{n-1}$ ($S_0 = 0$) sont centrés et de carré intégrable, avec $\mathbb{E}(\xi_n^2) = \sigma^2$. F. Spitzer considère le temps $T^+ = \inf\{n \geq 1 : S_n \leq 0\}$ de sortie de l'intervalle $]0, +\infty[$ et démontre dans [31] que

$$\mathbb{P}(T^+ > n) \sim cn^{-1/2},$$

lorsque la loi des accroissements est aperiodique. Dans une note de bas de page rajoutée avant la publication, il annonce le théorème limite central suivant pour la marche (S_n) conditionnée à rester positive :

$$(7) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n / \sigma \sqrt{n} \leq x | T^+ > n) = 1 - e^{-x^2/2}.$$

Apparemment il n'a jamais publié sa démonstration.

Il faut attendre l'année 1974 pour que D. Iglehart donne à ce résultat le statut d'un théorème : dans son article [18], il démontre que le processus $\{S_{[nt]} / \sigma \sqrt{n}, t \geq 0\}$ conditionné par l'événement

$\{T^+ > n\}$ converge en loi vers le méandre brownien. Pour cela, il utilise des estimations précises de $\mathbb{P}(T^+ = n)$ qui lui permettent d'écrire les quantités semblables à (7) comme des sommes de Riemann; afin d'avoir un bon contrôle de ces sommes, il ajoute l'hypothèse que les accroissements ont un moment d'ordre 3 (ce qui permet d'avoir une vitesse de convergence dans le TLC ordinaire).

Deux ans plus tard, E. Bolthausen ([3]) redémontre le théorème de D. Iglehart en s'affranchissant à la fois de l'hypothèse de moment d'ordre 3 et de la condition d'apériodicité. Plus surprenant : la démonstration de E. Bolthausen ne nécessite aucun calcul et utilise seulement le principe d'invariance de Donsker et le théorème de la transformation continue. Afin d'en expliquer les grandes lignes, introduisons quelques notations.

Soit \mathcal{C}_∞ l'espace des fonctions continues $w : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, et soit $\{X(t), t \geq 0\}$ le processus canonique de \mathcal{C}_∞ (pour tout $w \in \mathcal{C}_\infty$, $X(t)(w) = w(t)$). Pour tout $n \geq 1$, on désigne par W^n la loi sur \mathcal{C}_∞ du processus $\{\mathcal{S}_n(t), t \geq 0\}$ valant $S_k/\sigma\sqrt{n}$ aux instants $t = k/n$ et interpolé linéairement ailleurs. Enfin, nous introduisons un temps aléatoire T défini par $T(w) = \inf\{t \geq 0 : w(t+s) > w(t), \forall s \in]0, 1]\}$. Il n'est pas difficile de voir que T est W^n -presque sûrement fini et vérifie

$$\mathbb{P}(\mathcal{S}_n \in A \mid T^+ > n) = W^n(X(T + \cdot) - X(T) \in A),$$

pour tout $n \geq 1$ et tout $A \in \mathcal{C}_\infty$. Cette identité fondamentale donne une représentation du processus conditionné en terme d'une section du processus original. Rappelons que d'après le principe d'invariance de Donsker la suite (W^n) converge en loi vers la mesure de Wiener W (c'est-à-dire la loi du mouvement brownien). E. Bolthausen démontre que, sous W , le temps T est encore presque sûrement fini et continu (comme fonction sur \mathcal{C}_∞). En utilisant le théorème de la transformation continue (TTC, cf. Annexe B), il en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathcal{S}_n \in * \mid T^+ > n) = W(X(T + \cdot) - X(T) \in *).$$

D'après le théorème de D. Iglehart, la limite est le méandre brownien. Il nous faut mentionner ici le fait qu'au même moment, R. Durrett, D. Iglehart et D. Miller ([10]) démontrent avec une méthode similaire que le mouvement brownien issu d'un point $x > 0$ et conditionné à rester positif pendant une unité de temps converge aussi en loi vers le méandre brownien lorsque x tend vers 0. Ce résultat peut être considéré comme l'analogue en temps continu du théorème d'Iglehart-Bolthausen.

Supposons maintenant que (S_n) soit une marche aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^d ($d \geq 2$) centrée et de matrice de covariance égale à l'identité de $M_d(\mathbb{R})$. Supposons aussi fixé un cône convexe C issu de l'origine tel que $\mathbb{P}(\xi_1 \in C) > 0$ et notons T_C le temps de sortie de C . Le processus de Donsker \mathcal{S}_n , conditionné à rester dans C , peut encore être représenté comme une section du processus original à l'aide du temps $T(w) = \inf\{t \geq 0 : w(t+s) - w(t) \in C, \forall s \in]0, 1]\}$ qui permet d'écrire

$$\mathbb{P}(\mathcal{S}_n \in A \mid T_C > n) = W^n(X(T + \cdot) - X(T) \in A),$$

pour tout $n \geq 1$ et tout $A \in \mathcal{C}_\infty$. La perspective d'en déduire un principe d'invariance pour des marches aléatoires conditionnées à rester dans des cônes a sans doute motivé quelques recherches, car M. Shimura et K. Burdzy publient, chacun de leur côté et à peu près en même temps, des résultats relatifs au temps aléatoire T . Dans [5], K. Burdzy découvre que l'événement

$$A(\alpha) = \{ \text{Il existe des temps } 0 \leq t_1 < t_2 \text{ et un cône } C \text{ d'angle } \alpha \\ \text{et de sommet } X(t_1) \text{ tels que } X(t) \in C \text{ pour tout } t \in]t_1, t_2]\}$$

a une mesure de Wiener égale à :

$$- 0 \text{ si } \cos(\alpha/2) > 1/\sqrt{d};$$

– 1 si $\cos(\alpha/2) < 1/\sqrt{d}$.

M. Shimura ([28]) démontre lui aussi ce résultat en dimension $d = 2$ et règle le cas $\cos(\alpha/2) = 1/\sqrt{2}$ (la probabilité est encore nulle). En conséquence, pour des cônes de petite ouverture, le temps T est W -presque sûrement infini. La conclusion est sans appel : la méthode ne s'étend pas en dimension $d \geq 2$. Toutefois, M. Shimura parvient à étendre à la fois le théorème de Durrett-Iglehart-Miller au mouvement brownien planaire conditionné à rester dans un cône pendant une unité de temps, et le principe d'invariance d'Iglehart-Bolthausen à une marche aléatoire planaire conditionnée à rester dans un cône. Nous ne rentrerons pas ici dans les détails des hypothèses et des techniques qu'il utilise pour obtenir son principe d'invariance : cela sera discuté dans le chapitre correspondant. En nous inspirant de la démonstration qu'il propose, nous avons obtenu le théorème suivant :

Théorème 8.19. ($d = 2$). Soit C est un cône du plan d'ouverture β . On suppose que la marche aléatoire (S_n) est à pas bornés et que $\mathbb{P}(T_C > n)$ décroît lentement⁷ vers 0. Alors la suite de mesures conditionnelles

$$(\mathbb{P}(\mathcal{S}_n \in * | T_C > n))_n$$

converge vers $\widetilde{W}_{0,1}^C$ sur \mathcal{C}_∞ . De plus, on a

$$\mathbb{P}(T_C > n) = n^{-\pi/2\beta} L(n) ,$$

où $L(n)$ est une fonction à variation lente.

Bien que l'hypothèse de décroissance lente de $\mathbb{P}(T_C > n)$ paraisse difficile à vérifier en pratique, sa présence est justifiée par les faits suivants :

1. sous les hypothèses du théorème de Shimura, on peut démontrer directement (en utilisant des arguments semblables aux siens) que $\mathbb{P}(T_C > n)$ décroît lentement vers 0 ;
2. les travaux [33] de N. Varopoulos montrent que cette hypothèse est satisfaite par une grande classe de lois ;
3. historiquement, la première démonstration qu'a donnée D. Iglehart du principe d'invariance pour une marche réelle conditionnée à rester positive utilisait de façon cruciale l'équivalent $\mathbb{P}(T_C > n) \sim cn^{-1/2}$.
4. enfin, l'argument le plus important est que cette condition est tout simplement **nécessaire**. On a en effet le théorème suivant :

Théorème 8.20. On suppose que $d \geq 2$ et que C est un cône de révolution.

Si

$$\mathbb{P}(\mathcal{S}_n \in * | T_C > n) \Rightarrow \widetilde{W}_{0,1}^C ,$$

alors on a

$$\mathbb{P}(T_C > n) = \frac{1}{n^{\frac{\alpha_1}{2} - \frac{d-2}{4}}} L(n) ,$$

où L est une fonction à variation lente.

7. Une suite $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ décroît lentement vers 0 si $f(n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini et si pour tout $t > 1$, on a

$$\liminf \frac{f([tn])}{f(n)} > 0 .$$

Remarque. Le coefficient α_1 est donné par la formule

$$\alpha_1 = \sqrt{\lambda_1 + \left(\frac{d}{2} - 1\right)^2},$$

où $-\lambda_1 < 0$ est la première valeur propre du Laplacien sphérique agissant comme opérateur sur les fonctions différentiables sur $C \cap \mathbb{S}^{d-1}$ qui s'annulent sur $\partial C \cap \mathbb{S}^{d-1}$ (voir la section 7.3.2 du chapitre 7).

Perspectives Nous espérons étendre le théorème 8.19 en dimension $d \geq 3$ comme nous l'avons fait dans le cas du mouvement brownien (théorème 7.42). Il y a cependant une difficulté supplémentaire à surmonter car, contrairement au mouvement brownien, les processus de Donsker ne bénéficient pas des propriétés d'invariance par rotation et par changement d'échelle que nous avons mises à profit pour démontrer le théorème 7.42.

Première partie

Contributions à l'étude d'une marche
aléatoire centrifuge

Chapitre 1

Présentation du modèle de la marche centrifuge

Résumé. La *marche aléatoire centrifuge* est un processus de Markov dans l'espace euclidien dont les transitions sont celles d'une marche aléatoire symétrique ordinaire perturbées par une dérive centrifuge. Ce processus a été introduit et étudié par J. D. Fouks, E. Lesigne et M. Peigné dans [13]. Une présentation succincte du modèle et des résultats qu'ils ont établis a déjà été donnée dans l'introduction générale. Dans ce chapitre, nous revenons sur le modèle de la marche centrifuge et rappelons les estimations de moments obtenus dans [13] que nous utiliserons sans arrêt au cours de ce travail.

1.1 Modèle élémentaire et hypothèses d'isotropie

Soit un entier $d \geq 2$. La *marche centrifuge* est la chaîne de Markov dans \mathbb{R}^d associée à la probabilité de transition p définie sur \mathbb{R}^d par la formule¹

$$(1.1) \quad p(x, x + dy) = (1 + a(\|y\|)\langle \vec{x}, y \rangle) \mu(dy) =: \mu_{\vec{x}}(dy),$$

où

- μ est une loi de probabilité sur \mathbb{R}^d , symétrique et à support borné, qui représentera la loi de la marche non perturbée. (On suppose que μ n'est pas la masse de Dirac en 0) ;
- a est une fonction positive d'une variable réelle, borélienne, et telle que $\|y\|a(\|y\|) \leq 1$ pour μ -presque tout y .

Cela assure en particulier que, pour tout $x \neq 0$, la fonction $y \mapsto 1 + a(\|y\|)\langle \vec{x}, y \rangle$ est bien une densité de probabilité pour la mesure μ .

Conditions d'isotropie Afin d'obtenir un comportement centrifuge, on impose aux lois $\mu(dy)$ et $a(\|y\|)\mu(dy)$ de satisfaire les conditions d'isotropie suivantes :

- la matrice de covariance de $\mu(dy)$ est égale à $m'I$, $m' > 0$;
- la matrice de covariance de $a(\|y\|)\mu(dy)$ est égale à mI , $m > 0$.

1. Pour $x = 0$ la formule (1.1) doit se lire simplement $p(0, dy) = \mu(dy)$. Cette convention sera utilisée dans l'ensemble de nos calculs.

La première condition implique que dans toute base orthonormée la matrice de covariance de μ est égale à $m'I$, donc

$$(1.2) \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad \int \langle y, \vec{u} \rangle \langle y, \vec{x} \rangle \mu(dy) = \begin{cases} m & \text{si } \vec{u} = \vec{x}; \\ 0 & \text{si } \vec{u} \perp \vec{x}. \end{cases}$$

La variance $V = \int \|y\|^2 \mu(dy)$ de μ est égale à dm' . Puisque la même condition est imposée à la mesure $a(\|y\|) \mu(dy)$, on a aussi

$$(1.3) \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad \int \langle y, \vec{u} \rangle \langle y, \vec{x} \rangle a(\|y\|) \mu(dy) = \begin{cases} m' & \text{si } \vec{u} = \vec{x}; \\ 0 & \text{si } \vec{u} \perp \vec{x}. \end{cases}$$

Avec ces hypothèses d'isotropie, l'accroissement moyen est centrifuge :

Proposition 1.1. *L'accroissement moyen partant d'un point $x \neq 0$ vaut*

$$\int y \mu_{\vec{x}}(dy) = m\vec{x}.$$

Démonstration. On a

$$\int y \mu_{\vec{x}}(dy) = \underbrace{\int y \mu(dy)}_{=0} + \int y \langle \vec{x}, y \rangle a(\|y\|) \mu(dy);$$

donc

$$\langle \vec{u}, \int y \mu_{\vec{x}}(dy) \rangle = \int \langle \vec{u}, y \rangle \langle \vec{x}, y \rangle a(\|y\|) \mu(dy),$$

et le résultat découle de (1.3). □

La proposition suivante montre que la dispersion de l'accroissement est plus importante sur l'hyperplan orthogonal à x .

Proposition 1.2. *Partant d'un point $x \neq 0$, la variance de l'accroissement dans une direction \vec{u} vaut*

$$\int \langle y - m\vec{x}, \vec{u} \rangle^2 \mu_{\vec{x}}(dy) = \begin{cases} m' & \text{si } \vec{u} \perp \vec{x}; \\ m' - m^2 & \text{si } \vec{u} = \vec{x}. \end{cases}$$

La variance de l'accroissement vaut

$$\int \|y - m\vec{x}\|^2 \mu_{\vec{x}}(dy) = dm' - m^2.$$

Démonstration. On a

$$\int \langle y - m\vec{x}, \vec{u} \rangle^2 \mu_{\vec{x}}(dy) = \int \langle y, \vec{u} \rangle^2 \mu_{\vec{x}}(dy) - 2m \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle \int \langle y, \vec{u} \rangle \mu_{\vec{x}}(dy) + m^2 \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle^2.$$

Or,

$$\int \langle y, \vec{u} \rangle^2 \mu_{\vec{x}}(dy) = \int \langle y, \vec{u} \rangle^2 \mu(dy) + \int \langle y, \vec{u} \rangle^2 \langle \vec{x}, y \rangle a(\|y\|) \mu(dy) = m + 0,$$

car la fonction $y \mapsto \langle y, \vec{u} \rangle^2 \langle \vec{x}, y \rangle a(\|y\|)$ est impaire et μ symétrique; et d'après la proposition 1.1 on a

$$\int \langle y, \vec{u} \rangle \mu_{\vec{x}}(dy) = \langle \int y \mu_{\vec{x}}(dy), \vec{u} \rangle = m \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle.$$

Donc

$$\int \langle y - m\vec{x}, \vec{u} \rangle^2 \mu_{\vec{x}}(dy) = m' - m^2 \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle^2.$$

□

Quelques notations Dans toute la suite, nous noterons $(X_n)_{n \geq 0}$ la *marche aléatoire centrifuge* de loi de base μ et de fonction de perturbation a , c'est-à-dire la chaîne de Markov associée à la probabilité de transition p définie par la relation (1.1). Pour toute fonction mesurable bornée f sur \mathbb{R}^d , on a

$$\mathbb{E}(f(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n) = \int f(X_n + y)(1 + a(\|y\|)\langle \vec{X}_n, y \rangle) \mu(dy),$$

où $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \dots, X_n\}$ est la filtration naturellement associée à la suite (X_n) .

La loi du processus $(X_n)_{n \geq 0}$ est entièrement déterminée par la loi des transitions et par la distribution ν de la variable aléatoire X_0 . Nous noterons alors \mathbb{P}_ν la probabilité sur l'espace des réalisations et \mathbb{E}_ν l'espérance associée. Si la distribution initiale ν de la chaîne est une masse de Dirac en un point $x \in \mathbb{R}^d$, la probabilité \mathbb{P}_ν est notée \mathbb{P}_x . Lorsque $x = 0$, on omet l'indice.

Nous noterons $\rho_n = \|X_n\|$ le module de la marche centrifuge et $\vec{X}_n = X_n/\rho_n$ la direction de la marche centrifuge (lorsqu'elle est définie).

La proposition 1.1 dit exactement que

$$\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) = m\vec{X}_n.$$

c'est-à-dire que l'accroissement moyen, partant de X_n , est proportionnel à \vec{X}_n : la marche est centrifuge en moyenne.

1.2 Support de la marche centrifuge

Dans cette section, nous démontrons que le support de la marche centrifuge est le même que celui de la marche aléatoire de loi μ , éventuellement privé de l'origine. Pour ce faire, nous établissons en fait une propriété un peu plus forte qui constituera un outil essentiel pour cerner le domaine de validité du théorème limite local du chapitre 5.

Soient S le support de la loi μ et G le support de la marche aléatoire de loi μ . On rappelle que G est le semi-groupe fermé engendré par S et que ses éléments sont donc caractérisés par la relation

$$y \in G \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists z_1, z_2, \dots, z_n, \text{ tels que } z_i \in S \text{ et } z_1 + z_2 + \dots + z_n \in B(y, \epsilon).$$

On note $G^* = G \setminus \{0\}$.

La principale difficulté dans l'étude du support de la marche centrifuge provient du fait que la densité $1 + a(\|y\|)\langle \vec{x}, y \rangle$ peut s'annuler lorsque y se trouve sur la demi-droite engendrée par $-\vec{x}$. Ainsi, partant de $x \neq 0$, un pas dans la direction $-\vec{x}$ peut être impossible pour la marche centrifuge alors qu'il est possible pour la marche aléatoire de loi μ . Notre premier lemme montre que, dans les bons cas, un pas possible pour la marche aléatoire de loi μ l'est aussi pour la marche centrifuge.

Lemme 1.3. *Soient x et y deux points de G^* non alignés avec l'origine et tels que $y - x \in S$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\inf_{z \in B(x, \alpha]} \mathbb{P}_z(X_1 \in B(y, \epsilon]) > 0.$$

Démonstration. Fixons $\epsilon > 0$ et posons $a = y - x$. Comme les points x et y ne sont pas alignés avec l'origine, les points x et a ne le sont pas non plus et l'on peut trouver un $0 < \alpha \leq \epsilon/2$ tel qu'un point z de $B(x, \alpha)$ et un point u de $B(a, \alpha)$ ne soient jamais alignés avec l'origine. Choisissons un tel α . Comme aucune des deux boules $B(x, \alpha)$ et $B(a, \alpha)$ ne contient l'origine, la fonction $(z, u) \mapsto \langle \vec{z}, \vec{u} \rangle$ est continue sur le compact $B(x, \alpha) \times B(a, \alpha)$ et y atteint son minimum γ . Par le choix de α , on a

nécessairement $\gamma > -1$.

Pour tout $(z, u) \in B(x, \alpha] \times B(a, \alpha]$, on a $\langle \vec{z}, \vec{u} \rangle \geq \gamma$, soit encore $\langle \vec{z}, u \rangle \geq \gamma \|u\|$. En tenant compte du fait que $\|u\|a(\|u\|) \leq 1$ pour μ -presque tout u , on obtient que

$$1 + a(\|u\|)\langle \vec{z}, u \rangle \geq 1 + \min\{0, \gamma\}$$

pour μ -presque tout $u \in B(a, \alpha]$ et tout $z \in B(x, \alpha]$. D'autre part, tous ces couples de points vérifient $\|z + u - y\| = \|z - x + u - a\| \leq 2\alpha \leq \epsilon$.

On a donc

$$\begin{aligned} \inf_{z \in B(x, \alpha]} \mathbb{P}_z(X_1 \in B(y, \epsilon]) &= \inf_{z \in B(x, \alpha]} \int \mathbb{1}_{B(y, \epsilon]}(z + u)(1 + a(\|u\|)\langle \vec{z}, u \rangle) \mu(du) \\ &\geq \inf_{z \in B(x, \alpha]} \int \mathbb{1}_{B(a, \alpha]}(u)(1 + a(\|u\|)\langle \vec{z}, u \rangle) \mu(du) \\ &\geq \inf_{z \in B(x, \alpha]} \int \mathbb{1}_{B(a, \alpha]}(u)(1 + \min\{0, \gamma\}) \mu(du) \\ &\geq (1 + \min\{0, \gamma\}) \mu(B(a, \alpha]) . \end{aligned}$$

Cette dernière quantité est strictement positive car $\gamma > -1$ et $a \in S$. □

Si x et y sont deux points de G , la marche aléatoire de loi μ peut passer de x à un voisinage de y en un nombre fini de pas. Le lemme suivant, de nature purement algébrique, montre que lorsque x et y ne sont pas nuls on peut choisir les pas de sorte qu'ils soient tous autorisés pour la marche centrifuge.

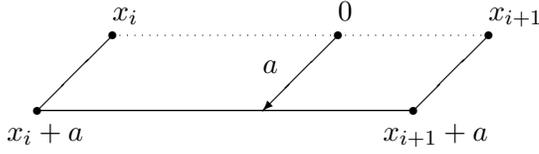
Lemme 1.4. *Soient x et y deux points de G^* . Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier $n \geq 1$ et une suite finie x_0, x_1, \dots, x_n de points de G^* tels que :*

- (a) $x_0 = x$ et $x_n \in B(y, \epsilon)$;
- (b) pour tout $i = 0 \dots n - 1$, les différences $x_{i+1} - x_i$ sont dans S ;
- (c) pour tout $i = 0 \dots n - 1$, les points x_{i+1} et x_i ne sont pas alignés avec l'origine.

Démonstration. Soient x et y deux points de G^* et soit $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour que la boule $B(y, \epsilon)$ ne contienne pas l'origine. Comme nous l'avons rappelé en début de section, puisque $y - x \in G$, il existe $z_1, z_2, \dots, z_n \in S$ tels que $z_1 + z_2 + \dots + z_n \in B(y - x, \epsilon)$. En posant $x_0 = x$ et $x_i = x_0 + z_1 + \dots + z_i$ pour $i = 1 \dots n$, on obtient une suite x_0, x_1, \dots, x_n satisfaisant les points (a) et (b) de l'énoncé. Si cette suite ne satisfait pas (c), alors on peut la modifier en introduisant des points intermédiaires. Commençons par une modification mineure. Si deux points consécutifs x_i et x_{i+1} sont égaux, on choisit un pas non nul $a \in S$ et l'on remplace dans la suite initiale la sous-suite x_i, x_{i+1} par $x_i, x_i + a, x_{i+1}$. Comme $x_i + a - x_i = a \in S$ et $x_{i+1} - (x_i + a) = -a \in S$ (car S est symétrique), la nouvelle suite ainsi obtenue satisfait encore l'hypothèse (b). Nous pouvons donc, sans perdre en généralité, supposer que deux points consécutifs de la suite x_0, x_1, \dots, x_n sont toujours distincts. Considérons maintenant le premier couple (x_i, x_{i+1}) tel que x_i et x_{i+1} soient alignés avec l'origine. (Notons que $x_i \neq 0$, car ou bien $i = 0$ et $x_i = x \neq 0$, ou bien $i \geq 1$ et par notre choix de i , les points x_{i-1} et x_i ne sont pas alignés avec l'origine.) Deux cas peuvent se produire :

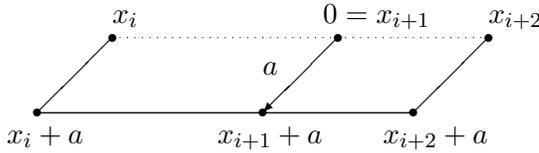
- Si $x_{i+1} \neq 0$, on choisit $a \in S$ tel que a n'appartienne pas à la droite (x_i, x_{i+1}) (ce qui est possible car S n'est pas contenu dans un demi-espace). La suite $x_i, x_i + a, x_{i+1} + a, x_{i+1}$ est telle que deux points consécutifs ont leur différence dans S et ne sont pas alignés avec l'origine. On remplace alors dans la suite de départ x_0, x_1, \dots, x_n la sous-suite x_i, x_{i+1} par la sous-suite

$x_i, x_i + a, x_{i+1} + a, x_{i+1}$.

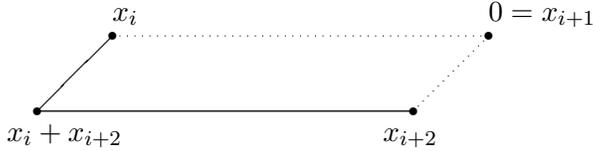


– Si $x_{i+1} = 0$, alors $x_{i+2} \neq 0$.

Si x_i et x_{i+2} sont alignés avec l'origine, on choisit encore un $a \in S$ n'appartenant pas à la droite (x_i, x_{i+2}) . La suite $x_i, x_i + a, x_{i+1} + a, x_{i+2} + a, x_{i+2}$ est telle que deux points consécutifs ont leur différence dans S et ne sont pas alignés avec l'origine. On remplace alors dans la suite de départ x_0, x_1, \dots, x_n la sous-suite x_i, x_{i+1}, x_{i+2} par la sous-suite $x_i, x_i + a, x_{i+1} + a, x_{i+2} + a, x_{i+2}$.



Si x_i et x_{i+2} ne sont pas alignés avec l'origine, alors la suite $x_i, x_i + x_{i+2}, x_{i+2}$ est telle que deux points consécutifs ont leur différence dans S et ne sont pas alignés avec l'origine. On remplace alors dans la suite de départ x_0, x_1, \dots, x_n la sous-suite x_i, x_{i+1}, x_{i+2} par la sous-suite $x_i, x_i + x_{i+2}, x_{i+2}$.



Dans tous les cas, la suite obtenue après cette opération contient strictement moins de couples de points successifs alignés avec l'origine que la suite de départ. En répétant cette opération autant de fois que cela est nécessaire, on obtient une suite satisfaisant les hypothèses (a), (b) et (c). \square

En combinant les lemmes 1.3 et 1.4 on déduit que, pourvu qu'ils soient non nuls, deux points joignables par la marche aléatoire de loi μ le sont aussi par la marche centrifuge :

Lemme 1.5. Soient x et y deux points de G^* . Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\inf_{z \in B(x, \alpha]} \mathbb{P}_z(X_n \in B(y, \epsilon]) > 0 .$$

Démonstration. Deux points x et y de G^* et un réel $\epsilon > 0$ étant fixés, considérons une suite $x = x_0, x_1, \dots, x_n$ ayant les propriétés énoncées dans le lemme 1.4 et choisissons un réel $\alpha_n > 0$ tel que $B(x_n, \alpha_n] \subset B(y, \epsilon)$. Comme x_n et x_{n-1} sont deux points de G^* non alignés avec l'origine et dont la différence $x_n - x_{n-1}$ appartient à S , d'après le lemme 1.3, il existe $\alpha_{n-1} > 0$ tel que

$$\inf_{z \in B(x_{n-1}, \alpha_{n-1}]} \mathbb{P}_z(X_1 \in B(x_n, \alpha_n]) > 0 .$$

En répétant cet argument, on construit de proche en proche une suite $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ de réels strictement positifs tels que, pour tout $i = 0 \dots n-1$, on ait

$$\inf_{z \in B(x_i, \alpha_i]} \mathbb{P}_z(X_1 \in B(x_{i+1}, \alpha_{i+1})) > 0.$$

Par la propriété de Markov, on a alors

$$\inf_{z \in B(x_0, \alpha_0]} \mathbb{P}_z(X_n \in B(x_n, \alpha_n]) \geq \prod_{i=0}^{n-1} \inf_{z \in B(x_i, \alpha_i]} \mathbb{P}_z(X_1 \in B(x_{i+1}, \alpha_{i+1})) > 0,$$

et l'on en déduit que $\alpha = \alpha_0$ convient. \square

On s'intéresse à présent au comportement des pas lorsque la marche est issue d'un voisinage de l'origine.

Lemme 1.6. *Il existe deux réels $r' > r > 0$ tels que*

$$\inf_{z \in B(0, r]} \mathbb{P}_z(X_1 \in \mathcal{O}_r^{r'}) > 0.$$

Démonstration. Choisissons $r > 0$ tel que $\mu(\mathcal{O}_{2r}) > 0$, puis $r' > 3r$ tel que $\mu(\mathcal{O}_{2r}^{r'-r}) > 0$. Pour tout $z \in B(0, r]$ et tout $y \in \mathcal{O}_{2r}^{r'-r}$, on a $r \leq \|y\| - \|z\| \leq \|z + y\| \leq r'$, et l'on en déduit que

$$\begin{aligned} \inf_{z \in B(0, r]} \mathbb{P}_z(X_1 \in \mathcal{O}_r^{r'}) &= \inf_{z \in B(0, r]} \int \mathbb{1}_{\mathcal{O}_r^{r'}}(z + y) (1 + a(\|y\|)\langle \vec{z}, y \rangle) \mu(dy), \\ &\geq \inf_{z \in B(0, r]} \int \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{2r}^{r'-r}}(y) (1 + a(\|y\|)\langle \vec{z}, y \rangle) \mu(dy). \end{aligned}$$

Posons

$$f(z) = \int \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{2r}^{r'-r}}(y) (1 + a(\|y\|)\langle \vec{z}, y \rangle) \mu(dy).$$

On a $f(0) = \mu(\mathcal{O}_{2r}^{r'-r}) > 0$. Puisque f est constante sur les demi-droites pointées, l'infimum de f sur la boule $B(0, r]$ privée de l'origine est égal à son infimum sur la sphère $S(0, r)$. Or la fonction f y est continue, donc y atteint son minimum. Pour démontrer le lemme, il suffit de prouver que f ne s'annule pas sur $S(0, r)$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un vecteur unitaire $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que

$$\int \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{2r}^{r'-r}}(y) (1 + a(\|y\|)\langle \vec{u}, y \rangle) \mu(dy) = 0.$$

Pour μ -presque tout $y \in \mathcal{O}_{2r}^{r'-r}$, on a alors $1 + a(\|y\|)\langle \vec{u}, y \rangle = 0$. En tenant compte du fait que μ -presque tout y vérifie $a(\|y\|)\|y\| \leq 1$, on en déduit que μ -presque tout y de $\mathcal{O}_{2r}^{r'-r}$ réalise l'égalité $\langle \vec{u}, y \rangle = -\|y\|$. Autrement dit, μ -presque tout y de $\mathcal{O}_{2r}^{r'-r}$ appartient à la demi-droite engendrée par $-\vec{u}$. Cela est impossible car μ est symétrique et $\mathcal{O}_{2r}^{r'-r}$ a une μ -mesure non nulle. \square

Théorème 1.7. *Le support de la marche centrifuge est le même que celui de la marche aléatoire de loi μ , privé éventuellement de l'origine. Plus précisément, si $y \in G^*$ alors, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $R > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que*

$$\inf_{z \in B(0, R] \cap G} \sup_{n \leq N} \mathbb{P}_z(X_n \in B(y, \epsilon)) > 0.$$

Démonstration. Il suffit d'établir la seconde assertion. Soient $y \in G^*$ et $\epsilon > 0$. Considérons les deux nombres réels $r' > r > 0$ donnés par le lemme 1.6 et choisissons un réel $R \geq r'$. D'après le lemme 1.5, pour tout $x \in \mathbf{O}_r^R \cap G$, il existe un réel $\alpha_x > 0$ et un entier n_x tels que

$$\inf_{z \in B(x, \alpha_x]} \mathbb{P}_z(X_{n_x} \in B(y, \epsilon]) > 0 .$$

Comme la famille de boules $\{B(x, \alpha_x) : x \in \mathbf{O}_r^R \cap G\}$ recouvre le compact $\mathbf{O}_r^R \cap G$, on peut en extraire une sous-famille finie $\{B(x_1, \alpha_1), \dots, B(x_m, \alpha_m)\}$ qui recouvre encore $\mathbf{O}_r^R \cap G$. Si on pose $N = \max\{n_i : i = 1 \dots m\}$, on obtient immédiatement

$$(1.4) \quad \inf_{z \in \mathbf{O}_r^R \cap G} \sup_{n \leq N} \mathbb{P}_z(X_n \in B(y, \epsilon]) > 0 .$$

Maintenant, par notre choix de r et $R > r'$, on a

$$\inf_{z \in B(0, r]} \mathbb{P}_z(X_1 \in \mathbf{O}_r^R) > 0 .$$

En utilisant la propriété de Markov et la relation (1.4), il vient alors

$$(1.5) \quad \inf_{z \in B(0, r]} \sup_{n \leq N+1} \mathbb{P}_z(X_n \in B(y, \epsilon]) > 0 .$$

En rassemblant (1.4) et (1.5), on obtient

$$\inf_{z \in B(0, R] \cap G} \sup_{n \leq N+1} \mathbb{P}_z(X_n \in B(y, \epsilon]) > 0 ;$$

ce qui est bien le résultat annoncé. □

1.3 Estimations de moments

Dans cette section, nous rassemblons un certain nombre d'estimations qui se trouvent dans [13] et que nous utiliserons à plusieurs reprises.

Nous aurons besoin des notations suivantes. Étant données deux variables aléatoires X et Y , on écrira :

- $Y = O(X)$ s'il existe une fonction positive f et une constante $C > 0$ telles que $f(x) \leq C|x|$ au voisinage de 0 et $|Y(\omega)| \leq f(X(\omega))$, quel que soit l'aléa ω ;
- $Y = \overline{O}(X)$ s'il existe une fonction positive f et une constante $C > 0$ telles que $f(x) \leq C|x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $|Y(\omega)| \leq f(X(\omega))$, quel que soit l'aléa ω .

Estimations de moments relatifs à la norme de la marche centrifuge L'espérance conditionnelle du carré du module s'obtient par un calcul direct :

Lemme 1.8 ([13], Proposition 1). *On a*

$$\mathbb{E}(\rho_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n) = \rho_n^2 + 2m\rho_n + V .$$

En écrivant $\rho_{n+1} = \sqrt{\rho_n^2 + 2\rho_n \langle \vec{X}_n, y \rangle + \|y\|^2}$, avec $y = X_{n+1} - X_n$, et en effectuant un développement limité, on obtient assez facilement une estimation de l'espérance conditionnelle de l'accroissement du module :

Lemme 1.9 ([13], Proposition 1). *On a*

$$\mathbb{E}(\rho_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \rho_n + m + \frac{V - m'}{2\rho_n} + \bar{O}\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right).$$

La moyenne de l'écart entre $\mathbb{E}(\rho_{n+1} - \rho_n | \mathcal{F}_n)$ et m est précisé dans le lemme suivant :

Lemme 1.10 ([13], conséquence du Lemme 2 et de la Proposition 1). *Pour toute distribution initiale ν et pour tout $\epsilon > 0$*

$$\mathbb{E}_\nu(|\mathbb{E}(\rho_{n+1} | \mathcal{F}_n) - \rho_n - m|) = O(n^{-1+\epsilon}).$$

On connaît aussi l'ordre de grandeur de l'espérance de « l'inverse » du module :

Lemme 1.11 ([13], Lemme 4). *Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $\beta > 0$, il existe $C_\beta > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$,*

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{(1 + \rho_n)^\beta}\right) \leq \frac{C_\beta}{(1 + n\alpha)^\beta}.$$

Estimations de moments relatifs à la direction de la marche centrifuge Les accroissements de la direction sont faciles à contrôler en norme : comme $X_{n+1} - X_n$ est borné indépendamment de n , l'inégalité $\|x\| \|\vec{x} - \vec{y}\| \leq 2\|x - y\|$ implique le lemme suivant :

Lemme 1.12. *Il existe une constante C ne dépendant que de μ telle que, pour tout $n \geq 1$, on ait*

$$\|\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n\| \leq \frac{C}{1 + \rho_n}.$$

La moyenne des accroissements est d'un ordre de grandeur inférieur :

Lemme 1.13 ([13], Lemme 3). *On a*

$$\mathbb{E}(\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n | \mathcal{F}_n) = O\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right).$$

Chapitre 2

Comportement en norme de la marche centrifuge

Résumé. Dans ce chapitre, nous complétons l'étude menée par J. D. Fouks, E. Lesigne et M. Peigné au sujet du comportement de la norme ρ_n de la marche centrifuge. Il a été démontré que ρ_n satisfait une loi forte des grands nombres avec vitesse de convergence ([13], Théorème 1) ; nous démontrons que ρ_n vérifie aussi une loi du logarithme itéré (théorème 2.2). Nous prouvons ensuite que le théorème limite central ([13], Théorème 2) s'étend en un principe d'invariance (théorème 2.6).

2.1 Loi des grands nombres

Nous rappelons l'énoncé de la loi forte des grands nombres obtenue par J. D. Fouks, E. Lesigne et M. Peigné. La démonstration repose sur un principe que nous reprendrons souvent : la suite considérée est décomposée en une martingale à laquelle on applique un théorème classique de convergence, et un reste dont on démontre qu'il est négligeable.

Théorème 2.1 ([13], Théorème 1). *Quelle que soit la distribution initiale ν , et quel que soit $\epsilon > 0$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_n - nm}{n^{\frac{1}{2} + \epsilon}} = 0 \quad \mathbb{P}_\nu\text{-p.s.}$$

Démonstration. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$Y_n = (\rho_n - \rho_{n-1}) - \mathbb{E}(\rho_n - \rho_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) = \rho_n - \mathbb{E}(\rho_n | \mathcal{F}_{n-1}),$$

et

$$Z_n = \mathbb{E}(\rho_n - \rho_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) - m = \mathbb{E}(\rho_n | \mathcal{F}_{n-1}) - \rho_{n-1} - m,$$

de sorte que

$$\rho_n - \rho_0 - nm = S_n + R_n,$$

avec $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ et $R_n = \sum_{k=1}^n Z_k$.

Le support de μ étant borné, les accroissements $|\rho_{n+1} - \rho_n|$ sont bornés par une constante $C > 0$ et l'on a donc $|Y_n| \leq 2C$. Comme la suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'accroissements de martingale uniformément bornés, la martingale

$$\sum_{k=1}^n \frac{Y_k}{k^{1/2 + \epsilon}}$$

est bornée en moyenne quadratique, donc presque sûrement convergente. Le lemme de Kronecker permet d'en déduire que, presque sûrement,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1/2-\epsilon} S_n = 0 .$$

Nous devons maintenant estimer le reste R_n . D'après le lemme 1.10, on a $\mathbb{E}_\nu(|Z_n|) = O(n^{-1+\epsilon})$ quel que soit $\epsilon > 0$. Par conséquent, pour tout $\epsilon > 0$, la série

$$\sum n^{-\epsilon} \mathbb{E}_\nu(|Z_n|)$$

est convergente, et la série

$$\sum n^{-\epsilon} |Z_n|$$

converge donc presque sûrement. En utilisant à nouveau le lemme de Kronecker, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\epsilon} R_n = 0 \quad \text{p.s.}$$

Les estimations obtenues pour S_n et R_n suffisent à démontrer le théorème. □

2.2 Loi du logarithme itéré

Cette section est consacrée à la démonstration de la loi du logarithme itéré suivante :

Théorème 2.2 (Loi du logarithme itéré). *Quelle que soit la distribution initiale, on a presque sûrement*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_n - nm}{\sqrt{2n(m' - m^2) \log \log n}} = +1 .$$

Comme dans la démonstration du théorème 2.1, on pose

$$Y_n = (\rho_n - \rho_{n-1}) - \mathbb{E}(\rho_n - \rho_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) = \rho_n - \mathbb{E}(\rho_n | \mathcal{F}_{n-1}) ,$$

et

$$Z_n = \mathbb{E}(\rho_n - \rho_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) - m = \mathbb{E}(\rho_n | \mathcal{F}_{n-1}) - \rho_{n-1} - m ,$$

de sorte que

$$\rho_n - \rho_0 - nm = S_n + R_n ,$$

avec $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ et $R_n = \sum_{k=1}^n Z_k$.

Au cours de la démonstration de la loi forte des grands nombres (théorème 2.1), nous avons établi le fait que pour tout $\epsilon > 0$ le reste R_n est presque sûrement négligeable devant n^ϵ . Il s'ensuit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n}{\sqrt{2n(m' - m^2) \log \log n}} = 0 \quad \text{p.s.}$$

Pour démontrer le théorème 2.2, il suffit donc de vérifier que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n(m' - m^2) \log \log n}} = +1 \quad \text{p.s.}$$

Pour cela, nous utiliserons la loi du logarithme itéré pour martingale suivante :

Proposition 2.3 ([24], Proposition VII-2-7). Soit $\{S_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$ une martingale de carré intégrable dont les accroissements $Y_k = S_k - S_{k-1}$ sont uniformément bornés¹. Si on note

$$V_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(Y_k^2 | \mathcal{F}_{k-1})$$

la variance conditionnelle, alors

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2V_n \log \log V_n}} = +1$$

presque sûrement sur l'ensemble $\{V_n \rightarrow \infty\}$.

Nous pouvons appliquer directement ce résultat à la martingale (S_n) , car ses accroissements sont uniformément bornés. Pour conclure, il suffit de vérifier que l'ensemble $\{V_n \rightarrow \infty\}$ est de mesure pleine et que l'on peut remplacer V_n par $n(m' - m^2)$. Cela est l'objet du lemme suivant.

Lemme 2.4. Presque sûrement, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{n(m' - m^2)} = 1.$$

Démonstration. On rappelle que

$$Y_{n+1} = \rho_{n+1} - \mathbb{E}(\rho_{n+1} | \mathcal{F}_n),$$

donc

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\rho_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(\rho_{n+1} | \mathcal{F}_n)^2.$$

En utilisant les lemmes 1.8 et 1.9, on obtient

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n) = m' - m^2 + O\left(\frac{1}{\rho_n}\right).$$

Choisissons un aléa ω tel que $\rho_n(\omega)$ soit équivalent à nm (ce qui est réalisé par presque tout ω d'après la loi forte des grands nombres). Il existe alors une constante $C > 0$ telle que, pour tout $n \geq 1$, on ait

$$|\mathbb{E}(Y_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n)(\omega) - (m' - m^2)| \leq \frac{C}{nm}.$$

Par inégalité triangulaire, il vient

$$\left| \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(Y_{k+1}^2 | \mathcal{F}_k)(\omega) - n(m' - m^2) \right| \leq \frac{C}{m} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n(\omega)}{n(m' - m^2)} = 1,$$

d'après le lemme de Cesàro. C'est ce qu'il fallait démontrer. □

1. i.e. $\sup_k |Y_k| \leq C$ p.s.

D'après la proposition 2.3, presque toute éventualité ω de $\{V_n \sim n(m' - m^2)\}$ vérifie

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(\omega)}{\sqrt{2V_n(\omega) \log \log V_n(\omega)}} = +1 .$$

Par ailleurs, une telle éventualité vérifie aussi

$$V_n(\omega) \log \log V_n(\omega) \sim n(m' - m^2) \log \log n ;$$

donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(\omega)}{\sqrt{2n(m' - m^2) \log \log n}} = +1 .$$

Comme l'ensemble $\{V_n \sim n(m' - m^2)\}$ a une mesure pleine, le théorème 2.2 est démontré.

2.3 Théorème limite central fonctionnel

J.-D. Fouks, E. Lesigne et M. Peigné ont obtenu le théorème limite central suivant :

Théorème 2.5 ([13], Théorème 2). *Quelle que soit la distribution initiale de la chaîne, la suite*

$$\left(\frac{\rho_n - nm}{\sqrt{n}} \right)$$

converge en loi vers une gaussienne centrée de variance $m' - m^2$.

Nous allons démontrer que ce théorème s'étend en un principe d'invariance pour la norme de la marche centrifuge. Nous noterons \mathcal{C}_1 l'espace mesurable des fonctions continues $w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne. Pour tout $n \geq 1$, on note $\{\Gamma_n(t), t \in [0, 1]\}$ le processus à trajectoires continues valant

$$\frac{\rho_k - \rho_0 - km}{\sqrt{n(m' - m^2)}}$$

aux instants $t = k/n$ et interpolé linéairement ailleurs. Nous avons alors :

Théorème 2.6 (Principe d'invariance). *Quelle que soit la distribution initiale, la suite de processus (Γ_n) converge en loi sur \mathcal{C}_1 vers le mouvement brownien.*

La méthode pour étudier la convergence du processus Γ_n consiste à l'écrire comme une somme de deux processus dont le premier peut être étudié à l'aide de méthodes de martingales, et le second peut être contrôlé directement par des estimations. Encore une fois, pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$Y_n = \rho_n - \mathbb{E}(\rho_n | \mathcal{F}_{n-1}) \quad \text{et} \quad Z_n = \mathbb{E}(\rho_n | \mathcal{F}_{n-1}) - \rho_{n-1} - m ,$$

de sorte que $Y_n + Z_n = \rho_n - \rho_{n-1} - m$. En posant $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ et $R_n = \sum_{k=1}^n Z_k$, on obtient la décomposition

$$S_n + R_n = \rho_n - \rho_0 - nm .$$

Le processus Γ_n s'écrit alors comme la somme des deux processus \mathcal{S}_n et \mathcal{R}_n , définis respectivement par

$$\mathcal{S}_n(t) = \frac{S_{[nt]} + (nt - [nt])Y_{[nt]+1}}{\sqrt{n(m' - m^2)}} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_n(t) = \frac{R_{[nt]} + (nt - [nt])Z_{[nt]+1}}{\sqrt{n(m' - m^2)}} .$$

Comme \mathcal{S}_n est le « processus de Donsker » associé à la martingale $\{S_n, \mathcal{F}_n\}$, nous allons montrer qu'il converge vers le mouvement brownien en appliquant un principe d'invariance pour martingale ; nous démontrerons ensuite que le reste \mathcal{R}_n est asymptotiquement négligeable, et cela achèvera la démonstration du théorème 2.6.

Lemme 2.7. *Quelle que soit la distribution initiale, la suite de processus (\mathcal{S}_n) converge en loi sur \mathcal{C}_1 vers le mouvement brownien.*

Démonstration. Nous allons appliquer le théorème A.1 à la martingale $\{S_n, \mathcal{F}_n\}$ d'accroissements Y_n . Comme ces accroissements Y_n sont tous bornés par une même constante, la condition de Lindeberg-Feller du théorème A.1 est trivialement vérifiée.

Au cours de la démonstration du lemme 2.4, nous avons établi que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{E}(Y_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) - (m' - m^2)| = 0 \quad \text{p.s.}$$

Le lemme de Cesàro permet d'en déduire que pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{[nt]} \mathbb{E}(Y_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}) = t(m' - m^2) \quad \text{p.s.}$$

La martingale $\{S_n/\sqrt{m' - m^2}, \mathcal{F}_n\}$ vérifie donc les deux hypothèses du théorème A.1 et, par suite, le processus \mathcal{S}_n converge en loi vers le mouvement brownien. \square

Lemme 2.8. *Quelle que soit la distribution initiale, la suite de processus (\mathcal{R}_n) converge vers 0 en probabilité.*

Démonstration. Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\|O_n\| = \sup_{t \in [0,1]} |O_n(t)| = \max_{k \leq n} \frac{|R_k|}{\sqrt{n(m' - m^2)}} \leq \frac{\sum_{k=1}^n |Z_k|}{\sqrt{n(m' - m^2)}}.$$

Par l'inégalité de Markov, il vient

$$\mathbb{P}_\nu(\|O_n\| \geq \delta) \leq \frac{\sum_{k=1}^n \mathbb{E}_\nu(|Z_k|)}{\delta \sqrt{n(m' - m^2)}}$$

pour tout $\delta > 0$. Or, nous savons d'après le lemme 1.10 que $\mathbb{E}_\nu(|Z_n|) = O(n^{-1+\epsilon})$ pour tout $\epsilon > 0$. En particulier, la série de terme général $n^{-1/2} \mathbb{E}_\nu(|Z_n|)$ est convergente, et le lemme de Kronecker permet d'en déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1/2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_\nu(|Z_k|) = 0$. D'où le lemme. \square

Démonstration du Théorème 2.6. Le théorème se déduit des lemmes 2.7 et 2.8. \square

Chapitre 3

Comportement en direction de la marche centrifuge

Résumé. La suite des directions (\vec{X}_n) de la marche aléatoire centrifuge converge presque sûrement vers une direction limite \vec{X} . Nous démontrons que $\sqrt{n}(\vec{X} - \vec{X}_n)$ converge en loi lorsque n tend vers l'infini, et nous identifions géométriquement la loi limite.

3.1 Convergence de la direction de la marche centrifuge

Dans [13], il est démontré que la suite des directions (\vec{X}_n) de la marche centrifuge converge presque sûrement vers une direction limite \vec{X} . Bien que cela ne soit pas mentionné dans l'article, la démonstration qui est donnée de ce résultat permet aussi d'obtenir une vitesse de convergence. Nous la rappelons ici.

Théorème 3.1 ([13], Théorème 3). *La suite des directions (\vec{X}_n) converge presque sûrement vers une direction limite \vec{X} , et pour tout $\epsilon > 0$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}-\epsilon}(\vec{X}_n - \vec{X}) = 0 \quad p.s.$$

Démonstration. Posons

$$Y_n = \vec{X}_n - \vec{X}_{n-1} - \mathbb{E}(\vec{X}_n - \vec{X}_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1})$$

et

$$Z_n = \mathbb{E}(\vec{X}_n - \vec{X}_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}).$$

D'après les lemmes 1.12 et 1.11, on a

$$\mathbb{E}(\|Y_n\|^2) \leq \frac{C}{(1+n\alpha)^2}.$$

Cela montre que pour tout $\epsilon > 0$, la martingale $\sum_{k=1}^n k^{1/2-\epsilon} Y_k$ est bornée en moyenne quadratique, donc presque sûrement convergente. De même, la série $\sum k^{1/2-\epsilon} Z_k$ est presque sûrement convergente, car $Z_n = O(n^{-2})$ (cf. lemme 1.13 et loi forte des grands nombres). Par conséquent, la série

$$\sum k^{1/2-\epsilon}(\vec{X}_k - \vec{X}_{k-1}) = \sum k^{1/2-\epsilon} Y_k + \sum k^{1/2-\epsilon} Z_k$$

est presque sûrement convergente, et le lemme de ... permet d'en déduire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/2-\epsilon} \sum_{k=n+1}^{\infty} (\vec{X}_k - \vec{X}_{k-1}) = 0 \quad \text{p.s.}$$

□

Le théorème 3.1 ne peut manquer de susciter la question suivante : l'exposant $1/2$ constitue-t-il une limite théorique dans le sens où $\sqrt{n}(\vec{X}_n - \vec{X})$ aurait une limite (en loi) non dégénérée, ou bien est-il simplement une limite technique due aux méthodes utilisées? Dans un premier temps, nous allons étudier cette question en dimension $d = 2$, où l'étude de la suite des directions peut être ramenée à un problème unidimensionnel en considérant la suite des angles de la marche centrifuge.

3.2 Théorème limite central pour l'angle de la marche centrifuge plane

Dans toute cette section, nous nous plaçons dans le cas où la dimension d est égale à 2.

3.2.1 Angle de la marche centrifuge : définition et convergence

On appelle *angle* d'un vecteur $\vec{u} \in \mathbb{S}^1$ tout nombre réel θ tel que $e^{i\theta} = \vec{u}$, et l'on définit la suite (θ_n) des angles de la marche centrifuge, trajectoire par trajectoire, de façon à rendre les accroissements $\theta_{n+1} - \theta_n$ minimaux :

- θ_1 est l'unique angle de \vec{X}_1 appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$;
- pour tout $n \geq 1$, θ_{n+1} est l'unique angle de \vec{X}_{n+1} appartenant à l'intervalle $[\theta_n - \pi, \theta_n + \pi[$.

Définir la suite des angles (θ_n) avec toutes ces précautions permet de comparer ses accroissements $\theta_{n+1} - \theta_n$ avec les accroissements $\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n$ de la suite des directions. En particulier, nous allons voir que la suite des angles converge presque sûrement vers un angle limite, et que la vitesse de convergence est encore de l'ordre de $n^{-1/2+\epsilon}$.

Pour tout $x \in \mathbb{S}^1$, on note $\arg(x)$ l'unique angle de x appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$ et l_x la longueur de la corde joignant x au point $(1, 0)$. La longueur de la corde l_x permet de contrôler l'argument de x :

Lemme 3.2. *Pour tout $x \in \mathbb{S}^1$, on a*

$$|\arg(x)| = l_x + l_x^2 \chi(l_x),$$

où χ est une fonction continue sur l'intervalle $[0, 2]$.

Démonstration. On a $l_x^2 = 2(1 - \cos(\arg(x)))$, donc

$$\arccos(1 - l_x^2/2) = \arccos(\cos(\arg(x))) = |\arg(x)|.$$

On conclut en effectuant un développement limité à l'ordre 2 de la fonction $t \mapsto \arccos(1 - t^2/2)$ au voisinage de 0. □

Nous pouvons traduire le théorème 3.1 de convergence de la suite des directions (\vec{X}_n) en terme de convergence de la suite des angles (θ_n) :

Proposition 3.3. *La suite des angles (θ_n) converge presque sûrement vers un angle limite θ et, pour tout $\epsilon > 0$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2} - \epsilon} (\theta_n - \theta) = 0 \quad p.s.$$

Démonstration. Nous savons que les résultats annoncés sont vrais pour la suite des directions (\vec{X}_n) . Il nous suffit donc de montrer comment l'on peut comparer \vec{X}_n et θ_n . Fixons un $\epsilon > 0$ et considérons une éventualité ω pour laquelle on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2} - \epsilon} (\vec{X}_n - \vec{X})(\omega) = 0.$$

(Dans la suite on omettra le ω). Posons $\alpha = \arg(\vec{X})$ et notons α_n l'angle du vecteur \vec{X}_n appartenant à l'intervalle $]\alpha - \pi, \alpha + \pi[$. Il est clair que la suite (α_n) converge vers α . Soit alors n_0 un entier tel que pour tous $n, m \geq n_0$, on ait $|\alpha_n - \alpha_m| < \pi$; le nombre α_m est alors l'unique angle de \vec{X}_m appartenant à l'intervalle $[\alpha_n - \pi, \alpha_n + \pi[$ et le lemme 3.2 donne

$$|\alpha_n - \alpha_m| = \|\vec{X}_n - \vec{X}_m\| + \|\vec{X}_n - \vec{X}_m\|^2 \chi(\|\vec{X}_n - \vec{X}_m\|).$$

Posons $c = \theta_{n_0} - \alpha_{n_0}$. Comme $|\alpha_{n_0+1} + c - \theta_{n_0}| = |\alpha_{n_0+1} - \alpha_{n_0}| < \pi$, on a $\theta_{n_0+1} = \alpha_{n_0+1} + c$ par définition de θ_{n_0+1} . Par récurrence, on voit que $\theta_n = \alpha_n + c$ pour tout $n \geq n_0$, et ainsi, les différences $|\alpha_n - \alpha_m|$ sont égales aux différences $|\theta_n - \theta_m|$ pour tous $m, n \geq n_0$. On a donc

$$|\theta_n - \theta_m| = \|\vec{X}_n - \vec{X}_m\| + \|\vec{X}_n - \vec{X}_m\|^2 \chi(\|\vec{X}_n - \vec{X}_m\|).$$

Ce développement prouve que la suite (θ_n) est de Cauchy, donc qu'elle converge vers une limite θ . En faisant tendre m vers l'infini dans cette relation, il vient alors

$$|\theta_n - \theta| = \|\vec{X}_n - \vec{X}\| + \|\vec{X}_n - \vec{X}\|^2 \chi(\|\vec{X}_n - \vec{X}\|).$$

Compte tenu du théorème 3.1, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2} - \epsilon} (\theta_n - \theta) = 0.$$

□

3.2.2 Quelques estimations

Pour mener à bien notre étude, nous avons besoin de nouvelles estimations de la norme des accroissements de la suite des directions que nous appliquerons ensuite à la suite des angles.

On rappelle que $V = \int \|y\|^2 \mu(dy) = dm'$.

Lemme 3.4. *On a*

$$\mathbb{E}(\|\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n\|^2 | \mathcal{F}_n) = \frac{V - m'}{\rho_n^2} + O\left(\frac{1}{\rho_n^3}\right).$$

Démonstration. Posons $\mu_{\vec{u}}(dy) = (1 + a(\|y\|)\langle \vec{u}, y \rangle) \mu(dy)$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n | \mathcal{F}_n) &= \int \left(\frac{\rho_n \vec{X}_n + y}{\sqrt{\rho_n^2 + 2\rho_n \langle y, \vec{X}_n \rangle + \|y\|^2}} - \vec{X}_n \right) \mu_{\vec{X}_n}(dy) \\ &= \int \left(\frac{\vec{X}_n + y \rho_n^{-1}}{\sqrt{1 + 2\langle y, \vec{X}_n \rangle \rho_n^{-1} + \|y\|^2 \rho_n^{-2}}} - \vec{X}_n \right) \mu_{\vec{X}_n}(dy). \end{aligned}$$

Pour tout triplet de réels (a, b, x) tel que $1 + ax + bx^2 \geq 0$ et $x \neq 0$, on définit la quantité $F_{a,b}(x)$ par la formule

$$\frac{1}{\sqrt{1 + ax + bx^2}} = 1 - \frac{a}{2}x + \left(\frac{3}{8}a^2 - \frac{b}{2}\right)x^2 + x^3 F_{a,b}(x) .$$

En utilisant ce développement avec $a = 2\langle y, \vec{X}_n \rangle$, $b = \|y\|^2$ et $x = \rho_n^{-1}$, il vient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n | \mathcal{F}_n) &= \underbrace{\rho_n^{-1} \int (y - \vec{X}_n \langle y, \vec{X}_n \rangle) \mu_{\vec{X}_n}(dy)}_{=a_n} \\ &+ \underbrace{\rho_n^{-2} \int \left(\vec{X}_n \left(\frac{3}{2} \langle y, \vec{X}_n \rangle^2 - \frac{\|y\|^2}{2} \right) - y \langle y, \vec{X}_n \rangle \right) \mu_{\vec{X}_n}(dy)}_{b_n} \\ &+ \underbrace{\rho_n^{-3} \int \left(F_{a,b}(\rho_n^{-1})(\vec{X}_n + y\rho_n^{-1}) + \frac{3}{2}y \langle y, \vec{X}_n \rangle^2 - y \frac{\|y\|^2}{2} \right) \mu_{\vec{X}_n}(dy)}_{=c_n} . \end{aligned}$$

Le premier terme a_n est nul car on peut l'écrire

$$a_n = \int y \mu_{\vec{X}_n}(dy) - \vec{X}_n \langle \int y \mu_{\vec{X}_n}(dy), \vec{X}_n \rangle ,$$

et l'on sait que $\int y \mu_{\vec{X}_n}(dy) = m\vec{X}_n$ (proposition 1.1).

Calculons b_n . Puisque l'intégrale de toute fonction impaire contre μ est nulle, l'expression b_n se simplifie en

$$\begin{aligned} b_n &= \int \left(\vec{X}_n \left(\frac{3}{2} \langle y, \vec{X}_n \rangle^2 - \frac{\|y\|^2}{2} \right) - y \langle y, \vec{X}_n \rangle \right) \mu(dy) , \\ &= \vec{X}_n \left(\underbrace{\frac{3}{2} \int \langle y, \vec{X}_n \rangle^2 \mu(dy)}_{=m'} - \underbrace{\frac{1}{2} \int \|y\|^2 \mu(dy)}_{=V} \right) - \int y \langle y, \vec{X}_n \rangle \mu(dy) , \\ &= \vec{X}_n \left(\frac{3}{2} m' - \frac{1}{2} V \right) - \int y \langle y, \vec{X}_n \rangle \mu(dy) . \end{aligned}$$

Or, d'après la relation (1.2) p. 26, on a $\int y \langle y, \vec{X}_n \rangle \mu(dy) = m\vec{X}_n$, donc

$$b_n = \left(\frac{m' - V}{2} \right) \vec{X}_n .$$

Il nous reste à estimer c_n et pour cela nous devons contrôler la quantité $F_{a,b}(x)$. Nous allons démontrer que lorsque a et b demeurent dans un compact de \mathbb{R} , la quantité $F_{a,b}(x)$ est bornée au voisinage de $x = 0$. Soit K une partie compacte de \mathbb{R} et soit $\epsilon > 0$ tel que, pour tous $a, b \in K$ et $x \in [-\epsilon, \epsilon]$, la quantité $1 + ax + bx^2$ soit strictement positive. Pour a, b dans K et $x \in [-\epsilon, \epsilon]$, la formule de Taylor à l'ordre 2 s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + ax + bx^2}} = 1 - \frac{a}{2}x + \left(\frac{3}{8}a^2 - \frac{b}{2}\right)x^2 + \frac{x^3}{2} \int_0^1 (1-u)^2 f_{a,b}^{(3)}(ux) du ,$$

et nous donne donc

$$F_{a,b}(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-u)^2 f_{a,b}^{(3)}(ux) du .$$

Or, la fonction de trois variables $(a, b, x) \mapsto f_{a,b}^{(3)}(x)$, définie sur le pavé $K \times K \times [-\epsilon, \epsilon]$, y est continue et donc majorée par une constante $C > 0$. Pour tous $a, b \in K$ et $x \in [-\epsilon, \epsilon]$, on a donc

$$|F_{a,b}(x)| \leq \frac{C}{2} \int_0^1 (1-u)^2 du ,$$

ce qui est bien le résultat annoncé.

Comme le support de μ est borné, les quantités $a = 2\langle y, \vec{X}_n \rangle$ et $b = \|y\|^2$ demeurent dans un compact lorsque y parcourt le support de μ , et $F_{a,b}(x)$ est donc bornée au voisinage de $x = 0$, uniformément en y dans le support de μ . On en déduit que $\rho_n^{-3}c_n = O(\rho_n^{-3})$.

La formule $\|\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n\|^2 = -2\langle \vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n, \vec{X}_n \rangle$ permet finalement de conclure que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\|\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n\|^2 | \mathcal{F}_n) &= -2\langle \mathbb{E}(\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n | \mathcal{F}_n), \vec{X}_n \rangle \\ &= -2\rho_n^{-2}\langle b_n, \vec{X}_n \rangle + O(\rho_n^{-3}) \\ &= \rho_n^{-2}(V - m') + O(\rho_n^{-3}) . \end{aligned}$$

□

Au cours de la démonstration de la proposition 3.3, nous avons établi que presque sûrement, pour tout n assez grand, on a

$$|\theta_{n+1} - \theta_n| = \|\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n\| + \|\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n\|^2 \chi(\|\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n\|) .$$

Cette relation permet de déduire du lemme 3.4 un équivalent de l'espérance conditionnelle du carré des accroissements de la suite de angles :

Corollaire 3.5. *Presque sûrement, on a*

$$\mathbb{E}((\theta_{n+1} - \theta_n)^2 | \mathcal{F}_n) \sim \frac{m'}{n^2 m^2} .$$

Démonstration. Vu ce qui précède, c'est immédiat si l'on se rappelle que ρ_n est presque sûrement équivalent à nm . □

Nous terminons cette section avec une estimation de l'espérance conditionnelle des accroissements de la suite des angles. Il s'agit essentiellement d'une traduction en terme d'angle du lemme 1.13.

Lemme 3.6. *Presque sûrement, pour tout $\epsilon > 0$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{2-\epsilon} \mathbb{E}(\theta_{n+1} - \theta_n | \mathcal{F}_n) = 0 .$$

Démonstration. La formule de Taylor avec reste intégral écrite à l'ordre 2 donne, pour tout réel x ,

$$e^{ix} = 1 + ix - x^2 \int_0^1 (1-u) e^{iux} du ,$$

soit, puisque $\int_0^1 (1-u) du = \frac{1}{2}$,

$$e^{ix} - 1 = ix + R(x),$$

avec $|R(x)| \leq x^2/2$. En appliquant cette inégalité avec $x = \theta_{n+1} - \theta_n$, et en prenant de part et d'autre l'espérance conditionnelle, on obtient

$$e^{-i\theta_n} \mathbb{E}(e^{i\theta_{n+1}} - e^{i\theta_n} | \mathcal{F}_n) = i \mathbb{E}(\theta_{n+1} - \theta_n | \mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(R(\theta_{n+1} - \theta_n) | \mathcal{F}_n),$$

et l'on en déduit

$$|\mathbb{E}(\theta_{n+1} - \theta_n | \mathcal{F}_n)| \leq |\mathbb{E}(e^{i\theta_{n+1}} - e^{i\theta_n} | \mathcal{F}_n)| + \frac{1}{2} \mathbb{E}((\theta_{n+1} - \theta_n)^2 | \mathcal{F}_n).$$

Or, on sait d'une part (lemme 1.13 et loi forte des grands nombre), que $\mathbb{E}(e^{i\theta_{n+1}} - e^{i\theta_n} | \mathcal{F}_n) = O(n^{-2})$ et d'autre part, que $\mathbb{E}((\theta_{n+1} - \theta_n)^2 | \mathcal{F}_n)$ est de l'ordre de n^{-2} . Le résultat annoncé s'en déduit immédiatement. \square

3.2.3 Démonstration du théorème limite central pour l'angle

Dans cette section, nous allons démontrer le théorème limite central suivant, relatif à la suite des angles de la marche centrifuge :

Théorème 3.7. *La suite normalisée des écarts à l'angle limite $(\sqrt{n}(\theta - \theta_n))_n$ converge en loi vers une loi normale centrée et de variance m'/m^2 .*

Nous allons encore utiliser un argument de martingale. On pose $\theta_0 = 0$. Par construction de la suite des angles, on a toujours $|\theta_{n+1} - \theta_n| \leq \pi$, donc la variable aléatoire $\theta_{n+1} - \theta_n$ est dans L^2 . Posons

$$Y_n = (\theta_n - \theta_{n-1}) - \mathbb{E}(\theta_n - \theta_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1})$$

et

$$Z_n = \mathbb{E}(\theta_n - \theta_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}),$$

de sorte que

$$\theta_n - \theta_{n-1} = Y_n + Z_n \quad \text{et} \quad \theta - \theta_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (Y_k + Z_k).$$

Nous nous intéressons d'abord à la suite d'accroissements de martingale (Y_n) . On a

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}^2) \leq \mathbb{E}((\theta_{n+1} - \theta_n)^2) \leq C \mathbb{E}(\|\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n\|^2),$$

et en utilisant les lemmes 1.12 et 1.11, il vient

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}^2) \leq \frac{C}{(1+n\alpha)^2}.$$

Cela prouve que la série $\sum \mathbb{E}(Y_n^2)$ est convergente; la martingale $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ est donc bornée dans L^2 .

Afin d'appliquer un théorème limite central pour martingale à S_n , nous devons estimer sa variance conditionnelle

$$V_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{E}(Y_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}).$$

Pour tout $n \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}((\theta_{n+1} - \theta_n)^2 | \mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(\theta_{n+1} - \theta_n | \mathcal{F}_n)^2.$$

En utilisant le corollaire 3.5 et le lemme 3.6, on voit que $\mathbb{E}(Y_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n)$ est presque sûrement équivalent à $m'/(n^2 m^2)$. Par sommation, on en déduit que

$$V_n \sim \frac{1}{n} \left(\frac{m'}{m^2} \right) \quad \text{p.s.}$$

Posons $s_n^2 = n^{-1}(m'/m^2)$. Nous allons maintenant vérifier la condition de Lindeberg-Feller :

Lemme 3.8. *Presque sûrement, pour tout $\epsilon > 0$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{-2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{E}(Y_k^2 \mathbb{1}_{\{|Y_k| \geq \epsilon s_n\}}) = 0.$$

Démonstration. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\mathbb{E}(Y_k^2 \mathbb{1}_{\{|Y_k| \geq \epsilon s_n\}}) \leq \mathbb{E}(Y_k^4)^{1/2} \mathbb{P}(|Y_k| \geq \epsilon s_n)^{1/2},$$

et, en utilisant l'inégalité de Markov pour majorer le second terme du produit de droite, il vient

$$\mathbb{E}(Y_k^2 \mathbb{1}_{\{|Y_k| \geq \epsilon s_n\}}) \leq \mathbb{E}(Y_k^4)^{1/2} \left(\frac{1}{\epsilon^4 s_n^4} \mathbb{E}(Y_k^4) \right)^{1/2} = \frac{1}{\epsilon^2 s_n^2} \mathbb{E}(Y_k^4).$$

En sommant, on obtient alors la majoration

$$(3.1) \quad s_n^{-2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{E}(Y_k^2 \mathbb{1}_{\{|Y_k| \geq \epsilon s_n\}}) \leq \frac{1}{\epsilon^2 s_n^4} \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathbb{E}(Y_i^4).$$

Estimons $\mathbb{E}(Y_{n+1}^4)$. Comme

$$|Y_{n+1}| \leq |\theta_{n+1} - \theta_n| + \mathbb{E}(|\theta_{n+1} - \theta_n| | \mathcal{F}_n),$$

on a

$$|Y_{n+1}| \leq C \left(\|\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n\| + \mathbb{E}(\|\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n\| | \mathcal{F}_n) \right),$$

et le lemme 1.12 conduit à la majoration

$$|Y_{n+1}| \leq C \left(\frac{C}{1 + \rho_n} + \mathbb{E} \left(\frac{C}{1 + \rho_n} | \mathcal{F}_n \right) \right) = \frac{C}{1 + \rho_n}.$$

On déduit alors du lemme 1.11 que

$$\mathbb{E}(|Y_{n+1}|^4) \leq \frac{C}{(1 + n\alpha)^4},$$

puis, en introduisant cette majoration dans la relation (3.1), on obtient finalement

$$s_n^{-2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{E}(Y_k^2 \mathbb{1}_{\{|Y_k| \geq \epsilon s_n\}}) \leq \frac{C}{\epsilon^2 s_n^4} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(1 + k\alpha)^4}.$$

Comme la somme dans le membre de droite de cette inégalité est de l'ordre de n^{-3} et que s_n^4 est de l'ordre de n^{-2} le lemme est démontré. \square

Puisque toutes les hypothèses du théorème A.2 sont vérifiées par la suite d'accroissements de martingale (Y_n) , la suite

$$\sqrt{n} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} Y_k \right)$$

converge en loi vers une loi normale centrée et de variance m'/m^2 .

Compte tenu de la décomposition

$$\theta - \theta_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (\theta_k - \theta_{k-1}) = \sum_{k=n+1}^{\infty} Y_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{E}(\theta_k - \theta_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1}),$$

pour démontrer le théorème 3.7 il suffit de vérifier que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{E}(\theta_k - \theta_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1}) = 0 \quad \text{p.s.}$$

D'après le lemme 3.6, on a presque sûrement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{500}{333}} \mathbb{E}(\theta_n - \theta_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) = 0.$$

Si l'on fixe une éventualité ω qui vérifie la convergence précédente, alors il existe une constante C telle que, pour tout n , on ait

$$|\mathbb{E}(\theta_n - \theta_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1})(\omega)| \leq C n^{-\frac{500}{333}}.$$

En sommant, on obtient

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\mathbb{E}(\theta_k - \theta_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1})(\omega)| \leq C \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-\frac{500}{333}} \sim C n^{-\frac{500}{333}+1}.$$

Puis, puisque $\sqrt{n} \times n^{-\frac{500}{333}+1} = n^{-\frac{1}{666}}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, il vient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} |\mathbb{E}(\theta_k - \theta_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1})(\omega)| = 0.$$

Comme cela est vrai pour presque tout ω , on déduit du lemme de Slutsky que la suite de terme général $\sqrt{n}(\theta - \theta_n)$ converge en loi vers la même limite que la suite de terme général $\sqrt{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} Y_k$. D'où le théorème.

3.3 Théorème limite central pour la direction de la marche centrifuge

Pour une marche centrifuge plane, nous avons traité le problème de la convergence de la direction en le « réduisant » à un problème d'angle, mais en dimension supérieure à 2, une telle approche n'est pas envisageable : en dimension 3 par exemple, il faudrait considérer un couple d'angles et se poserait alors le problème de l'indépendance de ces deux angles. Pour aborder le problème en dimension quelconque, nous allons simplement utiliser des outils plus sophistiqués que nous appliquerons directement à la suite des directions \vec{X}_n .

3.3.1 Quelques commentaires à propos de la dimension deux

Dans le cas de la dimension 2, nous avons obtenu un théorème limite central pour l'angle de la marche centrifuge. Voyons ce qu'il nous apprend sur la direction de la marche.

Pour x assez petit, on a $e^{ix} \cong 1+ix$, donc $e^{i(\theta_n-\theta)}-1 \cong i(\theta_n-\theta)$, ou encore $e^{i\theta_n}-e^{i\theta} \cong i(\theta_n-\theta) e^{i\theta}$. En terme de vecteurs, cette relation se traduit par

$$\sqrt{n}(\vec{X}_n - \vec{X}) \cong \sqrt{n}(\theta_n - \theta) R(\vec{X}),$$

où R est la rotation d'angle $\pi/2$. Si les variables $\sqrt{n}(\theta_n - \theta)$ et $U := R(\vec{X})$ étaient indépendantes, le théorème 3.7 prouverait que la suite $\sqrt{n}(\vec{X}_n - \vec{X})$ converge en loi vers la variable ρU , où ρ est une variable de loi $\mathcal{N}(0, m'/m^2)$ indépendante de U . Supposons que cela soit vrai et calculons la fonction caractéristique ϕ de la variable ρU . Pour tout $t \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\phi(t) = \mathbb{E}(e^{i\langle t, \rho U \rangle}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{i\rho\langle t, U \rangle} | U)).$$

Comme les variables ρ et U sont indépendantes, l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(e^{i\rho\langle t, U \rangle} | U)$ est la fonction caractéristique de ρ évaluée en $\langle t, U \rangle$. Puisque ρ suit une loi $\mathcal{N}(0, m'/m^2)$, il vient

$$\phi(t) = \mathbb{E}(e^{-\frac{1}{2} \frac{m'}{m^2} \langle t, U \rangle^2}).$$

Cette fonction caractéristique est un « mélange » de fonctions caractéristiques de lois normales.

3.3.2 De nouvelles estimations

Afin de ne pas mélanger les indices relatifs au « temps » et ceux relatifs à l'espace, ces derniers seront notés en exposant : les d coordonnées d'un point $x \in \mathbb{R}^d$ seront notées x^1, x^2, \dots, x^d . On rappelle que la matrice de covariance de la loi μ est égale à $m'I$; autrement dit, pour tous $1 \leq i, j \leq d$, on a

$$\int y^i y^j \mu(dy) = m' \delta_{ij}.$$

L'estimation suivante est importante pour établir le théorème limite central relatif à la direction de la marche centrifuge.

Lemme 3.9. *Presque sûrement, pour tous $1 \leq i, j \leq d$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \mathbb{E}((\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n)^i (\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n)^j | \mathcal{F}_n) = \frac{m'}{m^2} (\delta_{ij} - \vec{X}^i \vec{X}^j).$$

Démonstration. En posant $X_{n+1} = X_n + y$ et en utilisant les estimations du lemme 3.4, on obtient le développement

$$\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n = \rho_n^{-1} \left(y - \vec{X}_n \langle y, \vec{X}_n \rangle \right) + O(\rho_n^{-2})$$

dont on déduit que

$$\begin{aligned} (\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n)^i (\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n)^j &= \rho_n^{-2} \left(y^i y^j - \vec{X}_n^i y^j \langle y, \vec{X}_n \rangle - \vec{X}_n^j y^i \langle y, \vec{X}_n \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle y, \vec{X}_n \rangle^2 \vec{X}_n^i \vec{X}_n^j \right) + O(\rho_n^{-3}). \end{aligned}$$

Comme toutes les fonctions de la variable y apparaissant explicitement dans le membre de droite de cette égalité sont des fonctions paires, intégrer cette expression contre la mesure $\mu_{\vec{X}_n}(dy) =$

$(1 + a(\|y\|)\langle \vec{X}_n, y \rangle) \mu(dy)$ revient simplement à l'intégrer contre μ ; donc

$$(3.2) \quad \begin{aligned} & \mathbb{E}((\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n)^i (\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n)^j | \mathcal{F}_n) \\ &= \rho_n^{-2} \left(\int y^i y^j \mu(dy) - \vec{X}_n^i \int y^j \langle y, \vec{X}_n \rangle \mu(dy) \right. \\ & \quad \left. - \vec{X}_n^j \int y^i \langle y, \vec{X}_n \rangle \mu(dy) + \vec{X}_n^i \vec{X}_n^j \int \langle y, \vec{X}_n \rangle^2 \mu(dy) \right) + O(\rho_n^{-3}). \end{aligned}$$

Puisque

$$\int y^j \langle y, \vec{X}_n \rangle \mu(dy) = \sum_{k=1}^d \int y^j y^k \vec{X}_n^k \mu(dy) = m' \vec{X}_n^j$$

et

$$\int \langle y, \vec{X}_n \rangle^2 \mu(dy) = m',$$

la relation (3.2) se simplifie finalement en

$$\mathbb{E}((\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n)^i (\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n)^j | \mathcal{F}_n) = \rho_n^{-2} m' (\delta_{ij} - \vec{X}_n^i \vec{X}_n^j) + O(\rho_n^{-3}).$$

Le lemme se déduit alors de l'équivalence presque sûre de ρ_n avec nm et de la convergence de la suite (\vec{X}_n) vers le vecteur \vec{X} . \square

3.3.3 Démonstration du théorème limite central pour la direction

Nous allons maintenant démontrer le théorème limite central suivant, relatif à la direction de la marche centrifuge :

Théorème 3.10. *La suite de terme général $\sqrt{n}(\vec{X} - \vec{X}_n)$ converge en loi vers une loi dont la fonction caractéristique ϕ est donnée par la formule*

$$\phi(t) = \mathbb{E} \left(e^{-\frac{1}{2} \langle t, \Gamma t \rangle} \right),$$

où Γ est la matrice aléatoire dont les coefficients γ_{ij} valent $m' m^{-2} (\delta_{ij} - \vec{X}^i \vec{X}^j)$.

Remarque. Une interprétation géométrique de la loi limite est donnée en fin de section.

Considérons la suite d'accroissements de martingale (Δ_n) définie par

$$\Delta_n = \vec{X}_n - \vec{X}_{n-1} - \mathbb{E}(\vec{X}_n - \vec{X}_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}).$$

On a

$$\|\Delta_{n+1}\| \leq \|\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n\| + \mathbb{E}(\|\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n\| | \mathcal{F}_n),$$

si bien qu'en majorant $\|\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n\|$ par $C(1 + \rho_n)^{-1}$ on obtient

$$\|\Delta_{n+1}\| \leq \frac{C}{1 + \rho_n}.$$

Le lemme 1.11 conduit alors à la majoration

$$\mathbb{E}(\|\Delta_{n+1}\|^2) \leq \frac{C}{(1 + n\alpha)^2}$$

dont on déduit que la série $\sum \mathbb{E}(\|\Delta_n\|^2)$ est convergente. La martingale $Z_n = \sum_{k=1}^n \Delta_k$ est donc bornée dans L^2 .

Nous allons appliquer le théorème limite central A.3 à la martingale Z_n . Pour cela, nous devons d'abord estimer les variances conditionnelles

$$V_n^{ij} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{E}(\Delta_k^i \Delta_k^j | \mathcal{F}_{k-1}).$$

Lemme 3.11 (Estimation de V_n^{ij}). *Presque sûrement, pour tous $1 \leq i, j \leq d$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n V_n^{ij} = \frac{m'}{m^2} (\delta_{ij} - \vec{X}^i \vec{X}^j).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Delta_{n+1}^i \Delta_{n+1}^j | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}((\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n)^i (\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n)^j | \mathcal{F}_n) \\ &\quad - \mathbb{E}(\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n | \mathcal{F}_n)^i \mathbb{E}(\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n | \mathcal{F}_n)^j. \end{aligned}$$

D'après le lemme 1.13 et la loi forte des grands nombres, $\mathbb{E}(\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n | \mathcal{F}_n)$ est presque sûrement de l'ordre de n^{-2} , donc

$$\mathbb{E}(\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n | \mathcal{F}_n)^i \mathbb{E}(\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n | \mathcal{F}_n)^j$$

est négligeable devant n^{-2} . Par conséquent, l'estimation du lemme 3.9 donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \mathbb{E}(\Delta_{n+1}^i \Delta_{n+1}^j | \mathcal{F}_n) = \frac{m'}{m^2} (\delta_{ij} - \vec{X}^i \vec{X}^j)$$

Le résultat annoncé s'en déduit par sommation. \square

Posons $s_n^2 = n^{-1}$. Le lemme suivant montre que la suite d'accroissements de martingale (Δ_n) satisfait la condition de Lindeberg-Feller du théorème A.3; il se démontre exactement comme le lemme 3.8.

Lemme 3.12. *Presque sûrement, pour tout $\epsilon > 0$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{-2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{E}(\|\Delta_k\|^2 \mathbb{1}_{\{\|\Delta_k\| \geq \epsilon s_n\}}) = 0.$$

Vu les lemmes 3.11 et 3.12, le théorème A.3 montre que la suite $(\sqrt{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta_k)$ converge en loi vers une loi dont la fonction caractéristique ϕ est donnée par la formule

$$\phi(t) = \mathbb{E} \left(e^{-\frac{1}{2} \langle t, \Gamma t \rangle} \right),$$

où Γ est la matrice aléatoire dont les coefficients γ_{ij} valent $m' m^{-2} (\delta_{ij} - \vec{X}^i \vec{X}^j)$.

Comme

$$\vec{X} - \vec{X}_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (\vec{X}_k - \vec{X}_{k-1}) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{E}(\vec{X}_k - \vec{X}_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1}),$$

pour démontrer le théorème 3.10, il suffit de vérifier que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{E}(\vec{X}_k - \vec{X}_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1}) = 0 \quad \text{p.s.}$$

Or, cela est clair puisque nous avons déjà remarqué que $\mathbb{E}(\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n | \mathcal{F}_n)$ était presque sûrement de l'ordre de n^{-2} . Le théorème limite central pour la direction est donc démontré.

Identification géométrique de la loi limite Afin d'identifier géométriquement la loi limite, nous considérons :

- une famille $\{(e_1(\vec{u}), e_2(\vec{u}), \dots, e_d(\vec{u})) : \vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}\}$ de bases orthonormées de \mathbb{R}^d telles que $e_1(\vec{u}) = \vec{u}$;
- des variables aléatoires $\rho_2, \rho_3, \dots, \rho_d$ de loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{m'}{m^2})$ telles que $\rho_2, \rho_3, \dots, \rho_d$ et \vec{X} soient mutuellement indépendantes.

Le vecteur aléatoire $Y = \rho_2 e_2(\vec{X}) + \rho_3 e_3(\vec{X}) + \dots + \rho_d e_d(\vec{X})$ donne alors une représentation de la loi limite :

Proposition 3.13. *La loi limite de $\sqrt{n}(\vec{X} - \vec{X}_n)$ est identique à la loi du vecteur Y .*

Démonstration. Il suffit de vérifier que la fonction caractéristique ϕ_Y du vecteur aléatoire Y coïncide en tout point $t \in \mathbb{R}^d$ avec $\phi(t) = \mathbb{E} \left(e^{-\frac{1}{2} \langle t, \Gamma t \rangle} \right)$. Par indépendance des variables ρ_2, \dots, ρ_d et \vec{X} , on a

$$\phi_Z(t) = \mathbb{E} \left(\prod_{k=2}^d e^{i \rho_k \langle t, e_k(\vec{X}) \rangle} \right) = \mathbb{E} \left(\prod_{k=2}^{d-1} \mathbb{E} (e^{i \rho_k \langle t, e_k(\vec{X}) \rangle} \mid \vec{X}) \right) = \mathbb{E} \left(\prod_{k=2}^{d-1} e^{-\frac{m'}{2m^2} \langle t, e_k(\vec{X}) \rangle^2} \right).$$

Comme la famille de vecteurs $\{\vec{X}, e_2(\vec{X}), e_3(\vec{X}), \dots, e_d(\vec{X})\}$ est une base orthonormée de \mathbb{R}^d , on a

$$\sum_{k=2}^d \langle t, e_k(\vec{X}) \rangle^2 = \|t\|^2 - \langle t, \vec{X} \rangle^2 = \sum_{k=1}^d (t^k)^2 - \sum_{1 \leq i, j \leq d} t^i t^j \vec{X}^i \vec{X}^j = \sum_{1 \leq i, j \leq d} t^i t^j (\delta_{ij} - \vec{X}^i \vec{X}^j);$$

de sorte que

$$\frac{m'}{2m^2} \sum_{k=2}^d \langle t, e_k(\vec{X}) \rangle^2 = \frac{1}{2} \langle t, \Gamma t \rangle;$$

donc

$$\phi_Y(t) = \mathbb{E} \left(e^{-\frac{1}{2} \langle t, \Gamma t \rangle} \right) = \phi(t).$$

□

Chapitre 4

Comportement global de la marche centrifuge

Résumé. Les informations obtenues dans les deux chapitres précédents concernant le comportement du module ρ_n et de la direction \vec{X}_n conduisent naturellement à formuler une conjecture (4.1) relative au comportement asymptotique de la loi de la marche (X_n). Les résultats des chapitres précédents ne suffisent ni à confirmer ni à infirmer cette conjecture. En remarquant que la suite de terme général $X_n - X_{n-1} - m\vec{X}_{n-1}$ est une suite d'accroissements de martingale, nous obtenons néanmoins un théorème limite central avec centrage « non conventionnel ».

4.1 Une conjecture

Nous savons que, presque sûrement, $n^{-1}\rho_n \rightarrow m$ et $\vec{X}_n \rightarrow \vec{X}$, donc $n^{-1}X_n \rightarrow m\vec{X}$. Cela s'écrit encore

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n - nm\vec{X}}{n} = 0 \quad \text{p.s.}$$

On peut être un peu plus précis. Pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$(4.1) \quad \frac{X_n - nm\vec{X}}{n^{\frac{1}{2}+\epsilon}} = \left(\frac{\rho_n - nm}{n^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \right) \vec{X}_n + mn^{\frac{1}{2}-\epsilon}(\vec{X}_n - \vec{X}),$$

et l'on sait qu'à la fois

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_n - nm}{n^{\frac{1}{2}+\epsilon}} = 0 \quad \text{p.s.}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}-\epsilon}(\vec{X}_n - \vec{X}) = 0 \quad \text{p.s.},$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n - nm\vec{X}}{n^{\frac{1}{2}+\epsilon}} = 0 \quad \text{p.s.}$$

Il est alors naturel de s'interroger sur le comportement asymptotique de la suite de terme général $n^{-1/2}(X_n - nm\vec{X})$. Si nous observons la décomposition (4.1) avec $\epsilon = 0$, nous voyons d'abord apparaître le terme $n^{-1/2}(\rho_n - nm)$ dont nous savons qu'il converge en loi vers une variable ν_1 de loi normale $\mathcal{N}(0, m' - m^2)$, indépendante de \vec{X} ; vient ensuite la variable \vec{X}_n qui tend vers la variable \vec{X} ; et enfin, le terme $\sqrt{n}(\vec{X}_n - \vec{X})$ que nous savons converger en loi vers la variable $Z = \nu_2 e_2(\vec{X}) + \dots + \nu_d e_d(\vec{X})$, où les variables ν_2, \dots, ν_d sont mutuellement indépendantes, de même

loi $\mathcal{N}(0, m'm^{-2})$ et forment une suite indépendante de \vec{X} . Si nous en savions un peu plus sur l'indépendance mutuelle des différents termes, nous pourrions espérer démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n - nm\vec{X}}{\sqrt{n}} = \nu_1\vec{X} + m(\nu_2e_2(\vec{X}) + \dots + \nu_d e_d(\vec{X})) \quad \text{en loi .}$$

Reformulons cette conjecture en harmonisant les notations. Soient $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_d$ des variables aléatoires telles que les variables $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_d$ et \vec{X} soient mutuellement indépendantes, que μ_1 suive la loi $\mathcal{N}(0, m' - m^2)$ et que les variables μ_2, \dots, μ_d suivent toutes la loi $\mathcal{N}(0, m')$. Posons $Y = \mu_1 e_1(\vec{X}) + \mu_2 e_2(\vec{X}) + \dots + \mu_d e_d(\vec{X})$.

Conjecture 4.1. *La suite de terme général*

$$\frac{X_n - nm\vec{X}}{\sqrt{n}}$$

converge en loi vers le vecteur Y .

La fonction caractéristique ϕ_Y du vecteur Y se calcule comme celle du vecteur Z dans la démonstration du théorème 3.13 : par des intégrations successives, il vient

$$\phi_Y(t) = \mathbb{E} \left(e^{-\frac{1}{2}((m' - m^2)\langle t, e_1(\vec{X}) \rangle)^2 + m' \langle t, e_2(\vec{X}) \rangle^2 + \dots + m' \langle t, e_d(\vec{X}) \rangle^2} \right) ,$$

et puisque la famille $\{e_1(\vec{X}), e_2(\vec{X}), \dots, e_d(\vec{X})\}$ est une base orthonormée de \mathbb{R}^d , avec $e_1(\vec{X}) = \vec{X}$, on obtient la formule

$$\phi_Y(t) = \mathbb{E} \left(e^{-\frac{1}{2}(m' \|t\|^2 - m^2 \langle t, \vec{X} \rangle^2)} \right) ,$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme

$$\phi_Y(t) = \mathbb{E} \left(e^{-\frac{1}{2} \langle t, Qt \rangle} \right) ,$$

où Q est la matrice aléatoire dont les coefficients q_{ij} valent $m' \delta_{ij} - m^2 \vec{X}^i \vec{X}^j$.

4.2 Un théorème limite central

On rappelle que, pour tout $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$, on a

$$\int y \mu_{\vec{u}}(dy) = m\vec{u} ,$$

et qu'en conséquence,

$$\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) = \int y \mu_{\vec{X}_n}(dy) = m\vec{X}_n .$$

La suite de vecteurs (A_n) définie par $A_n = X_n - X_{n-1} - m\vec{X}_{n-1}$ est donc une suite d'accroissements de martingale par rapport à la filtration (\mathcal{F}_n) . La martingale associée est $M_n = \sum_{k=1}^n A_k = X_n - m \sum_{k=1}^{n-1} \vec{X}_k$. Nous allons appliquer à cette martingale le théorème limite central A.3. Calculons d'abord les variances conditionnelles. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(A_{n+1}^i A_{n+1}^j | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^i (X_{n+1} - X_n)^j | \mathcal{F}_n) - m \vec{X}_n^j \mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^i | \mathcal{F}_n) \\ &\quad - m \vec{X}_n^i \mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^j | \mathcal{F}_n) + m^2 \vec{X}_n^i \vec{X}_n^j . \end{aligned}$$

Le premier terme, $\mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^i (X_{n+1} - X_n)^j | \mathcal{F}_n)$, vaut

$$\int y^i y^j \mu_{\vec{X}_n}(dy) = \int y^i y^j \mu(dy) = m' \delta_{ij}$$

et, d'après le calcul de l'espérance conditionnelle des accroissements de la marche rappelé plus haut, on a

$$\mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^i | \mathcal{F}_n) = m \vec{X}_n^i \quad \text{et} \quad \mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^j | \mathcal{F}_n) = m \vec{X}_n^j,$$

donc

$$\mathbb{E}(A_{n+1}^i A_{n+1}^j | \mathcal{F}_n) = m' \delta_{ij} - m^2 \vec{X}_n^i \vec{X}_n^j.$$

En passant à la limite, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(A_{n+1}^i A_{n+1}^j | \mathcal{F}_n) = m' \delta_{ij} - m^2 \vec{X}^i \vec{X}^j \quad \text{p.s.},$$

donc, d'après le lemme de Cesàro,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(A_k^i A_k^j | \mathcal{F}_{k-1}) = m' \delta_{ij} - m^2 \vec{X}^i \vec{X}^j \quad \text{p.s.}$$

La première hypothèse du théorème A.3 est donc vérifiée avec la normalisation $s_n = \sqrt{n}$ et la matrice Q dont les coefficients sont donnés par $q_{ij} = m' \delta_{ij} - m^2 \vec{X}^i \vec{X}^j$. La seconde hypothèse est trivialement vérifiée car les accroissements A_k sont bornés par une constante, indépendante de k , et le théorème prouve que la suite de terme général $n^{-1/2}(X_n - m \sum_{k=1}^{n-1} \vec{X}_k)$ converge vers une loi dont la fonction caractéristique est donnée par $\mathbb{E}(e^{-\frac{1}{2}\langle t, Qt \rangle})$. On reconnaît la fonction caractéristique du vecteur Y de la section précédente. D'où le théorème :

Théorème 4.2. *La suite de terme général*

$$\frac{X_n - m \sum_{k=1}^{n-1} \vec{X}_k}{\sqrt{n}}$$

converge en loi vers le vecteur Y .

Ce résultat constitue-t-il une avancée dans la direction de la conjecture ? On a

$$\frac{X_n - nm\vec{X}}{\sqrt{n}} = \frac{X_n - m \sum_{k=1}^{n-1} \vec{X}_k}{\sqrt{n}} + m\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (\vec{X}_k - \vec{X}) \right),$$

et, comme le premier terme du membre de droite converge vers la loi de Y , il suffirait que

$$n^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n-1} (\vec{X}_k - \vec{X})$$

tende vers 0 en probabilité pour valider la conjecture. Mais il n'est pas du tout clair que cela soit vrai. D'après la proposition 3.1, nous savons que, presque sûrement, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}-\epsilon} (\vec{X}_n - \vec{X}) = 0.$$

Donc, pour tout $\epsilon > 0$, la série $\sum n^{-\frac{1}{2}-\epsilon}(\vec{X}_n - \vec{X})$ est presque sûrement convergente et le lemme de Kronecker implique alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{1}{2}-\epsilon} \sum_{k=1}^{n-1} (\vec{X}_k - \vec{X}) = 0.$$

Nous ne savons pas ce qui se produit pour $\epsilon = 0$ et il ne serait pas surprenant que ce cas produise une convergence en loi qui déjouerait notre plan d'attaque de la conjecture. L'argument heuristique suivant plaide en faveur de cette déconvenue. Écrivons

$$n^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^n (\vec{X}_k - \vec{X}) = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^{\infty} \frac{\xi_j}{j},$$

et supposons que les variables ξ_j soient indépendantes et de même loi centrée et de variance égale à 1. Le choix du dénominateur en j est justifié par le fait que $\mathbb{E}(\|\vec{X}_{j+1} - \vec{X}_j\|^2 | \mathcal{F}_j)$ est de l'ordre de j^{-2} . Un réarrangement des termes donne

$$n^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^{\infty} \frac{\xi_j}{j} = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^n \xi_k + n^{\frac{1}{2}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\xi_k}{k}.$$

D'après le théorème limite central pour des variables i.i.d., le terme

$$n^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^n \xi_k$$

converge en loi vers une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. De même, le théorème limite central A.2 pour le reste d'une martingale bornée dans L^2 montre que le terme

$$n^{\frac{1}{2}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\xi_k}{k}$$

converge en loi vers une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Comme ces deux termes sont indépendants, nous en déduisons que la suite de terme général

$$n^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^{\infty} \frac{\xi_j}{j}$$

converge en loi vers une loi normale $\mathcal{N}(0, 2)$.

Chapitre 5

Vers un théorème limite local

Résumé. La probabilité pour que la marche centrifuge se trouve dans une partie bornée K de l'espace à l'instant n décroît à vitesse exponentielle. Nous déterminons un encadrement de ce taux de décroissance exponentielle, indépendant de K , et valable pour une grande classe d'ensembles K . Nous utilisons ensuite cet encadrement pour calculer la valeur du taux de décroissance exponentielle dans le cas de la marche centrifuge plane aux quatre plus proches voisins ; ce résultat répond à une question soulevée dans [13].

5.1 Transformée de Laplace

Nous avons rassemblé dans cette section quelques résultats relatifs à la transformée de Laplace d'une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d . Nous rappelons en particulier le procédé de relativisation de Cramer qui jouera un rôle important dans la suite de ce chapitre.

Soit μ une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d . Nous dirons que μ possède *tous les moments exponentiels* si, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, l'intégrale

$$\int e^{\langle x, y \rangle} \mu(dy)$$

est finie. Notons qu'il est équivalent de supposer que l'intégrale

$$\int e^{\alpha \|y\|} \mu(dy)$$

est finie quelque soit $\alpha > 0$, car la réunion de cônes

$$\bigcup_{\epsilon=\pm 1} \bigcup_{i=1}^d \{y \in \mathbb{R}^d : \|y\| \leq \epsilon \sqrt{d} \langle e_i, y \rangle\}$$

recouvre \mathbb{R}^d , donc

$$\int e^{\alpha \|y\|} \mu(dy) \leq \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_{i=1}^d \int e^{\alpha \epsilon \sqrt{d} \langle e_i, y \rangle} \mu(dy).$$

Lorsque la mesure de probabilité μ possède tous les moments exponentiels, sa transformée de Laplace L_μ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par la formule

$$L_\mu(x) = \int e^{\langle x, y \rangle} \mu(dy).$$

C'est une fonction convexe indéfiniment différentiable ; ses dérivées partielles sont données par

$$\frac{\partial L_\mu}{\partial x_i}(x) = \int y_i e^{\langle x, y \rangle} \mu(dy) ;$$

en particulier, la moyenne de μ est donnée par le gradient de L_μ évalué au point 0. Par conséquent, la mesure μ est centrée si et seulement si 0 est un point critique de L_μ ; étant donné la convexité de L_μ , cela est équivalent à ce que L_μ atteigne son minimum en 0.

Supposons que μ ne soit pas centrée et que sa transformée de Laplace L_μ atteigne son minimum $\rho > 0$ en un point $p \neq 0$. La fonction $x \mapsto \rho^{-1} L_\mu(x+p) = \int e^{\langle x, y \rangle} \rho^{-1} e^{\langle p, y \rangle} \mu(dy)$ est la transformée de Laplace de la mesure de probabilité $\mu^*(dy) = \rho^{-1} e^{\langle p, y \rangle} \mu(dy)$ et atteint son minimum en $x = 0$, donc μ^* est centrée. Le procédé par lequel on obtient μ^* à partir de μ est appelé *procédé de relativisation de Cramer*. La proposition suivante donne une condition suffisante d'existence d'un minimum global pour la transformée de Laplace, donc d'existence de la mesure *relativisée*.

Proposition 5.1. *Soit μ une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d possédant tous les moments exponentiels, et soit L_μ sa transformée de Laplace.*

– *Si le support de μ est contenu dans un demi-espace $\{y : \langle \vec{u}, y \rangle \leq 0\}$, alors*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} L_\mu(\lambda \vec{u}) = \mu\{y : \langle \vec{u}, y \rangle = 0\} .$$

– *Si le support de μ n'est pas contenu dans un demi-espace fermé, alors la fonction L_μ est strictement convexe et coercive ; elle possède un minimum global strict $\rho > 0$, atteint en un point p de \mathbb{R}^d , et la mesure de probabilité μ^* définie par la formule*

$$(5.1) \quad \mu^*(dy) = \frac{e^{\langle p, y \rangle}}{\rho} \mu(dy) ,$$

est centrée. On dira que μ^ est la mesure relativisée de μ .*

Démonstration. Supposons que le support de μ soit contenu dans le demi-espace $\{y \in \mathbb{R}^d : \langle \vec{u}, y \rangle \leq 0\}$. On a alors

$$L_\mu(\lambda \vec{u}) = \int_{\langle \vec{u}, y \rangle \leq 0} e^{\lambda \langle \vec{u}, y \rangle} \mu(dy) .$$

Quel que soit $\lambda > 0$, la fonction $y \mapsto e^{\lambda \langle \vec{u}, y \rangle}$ est dominée par 1 sur le demi-espace $\{y \in \mathbb{R}^d : \langle \vec{u}, y \rangle \leq 0\}$; si $\langle \vec{u}, y \rangle < 0$, alors $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{\lambda \langle \vec{u}, y \rangle} = 0$, et si $\langle \vec{u}, y \rangle = 0$, alors $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{\lambda \langle \vec{u}, y \rangle} = 1$. Le résultat annoncé s'ensuit par le théorème de convergence dominée.

Supposons maintenant que le support de μ ne soit contenu dans aucun demi-espace fermé. Soient $x_1 \neq x_2$ deux points de \mathbb{R}^d et $a, b > 0$ tels que $a + b = 1$. Puisque la fonction exponentielle est strictement convexe, on a

$$e^{\langle ax_1 + bx_2, y \rangle} \leq a e^{\langle x_1, y \rangle} + b e^{\langle x_2, y \rangle} ,$$

avec égalité si et seulement si $\langle x_1, y \rangle = \langle x_2, y \rangle$, c'est-à-dire si y appartient l'hyperplan $(x_1 - x_2)^\perp$ orthogonal à $x_1 - x_2$. On en déduit que

$$L_\mu(ax_1 + bx_2) \leq a L_\mu(x_1) + b L_\mu(x_2) ,$$

avec égalité si et seulement si $\mu\{(x_1 - x_2)^\perp\} = 1$. Comme le support de μ n'est pas contenu dans un hyperplan, la fonction L_μ est strictement convexe. Démontrons ensuite que L_μ est coercive. Soit $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Comme le support de μ n'est pas contenu dans le demi-espace $\{y \in \mathbb{R}^d : \langle \vec{u}, y \rangle \leq 0\}$,

il existe une boule fermée B contenue dans $\{y \in \mathbb{R}^d : \langle \vec{u}, y \rangle > 0\}$ telle que $\mu(B) > 0$. En posant $\alpha = \inf_{y \in B} \langle \vec{u}, y \rangle > 0$, on a pour tout $\lambda > 0$

$$L_\mu(\lambda \vec{u}) \geq \int_B e^{\lambda \langle \vec{u}, y \rangle} \mu(dy) \geq e^{\lambda \alpha} \mu(B) .$$

Donc

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} L_\mu(\lambda \vec{u}) = +\infty .$$

Démontrons finalement que L_μ admet un minimum global strict. D'après le lemme C.1, on a

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} L_\mu(x) = +\infty ,$$

donc il existe un nombre $R > 0$ tel que $L_\mu(x) \geq 2$ quel que soit $x \notin B(0, R)$. La fonction L_μ est continue sur $B(0, R]$ et y atteint donc son minimum $0 < \rho \leq L_\mu(0) = 1$. Par le choix de R , le nombre ρ est nécessairement un minimum global; de plus, la stricte convexité de L_μ assure que ρ est un minimum global strict. Le procédé de relativisation expliqué un peu plus tôt s'applique donc. \square

Corollaire 5.2. *Soit μ une mesure de probabilité possédant tous les moments exponentiel et dont le support n'est pas contenu dans un demi-espace. Soit μ^* la mesure relativisée de μ . Si (S_n) est la marche aléatoire de loi μ et si (S_n^*) est la marche aléatoire de loi μ^* , alors pour tout entier $n \geq 1$, toute fonction $\phi : (\mathbb{R}^d)^n \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne positive, et tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$(5.2) \quad \mathbb{E}_x(\phi(S_n, S_{n-1}, \dots, S_1)) = \rho^n e^{\langle p, x \rangle} \mathbb{E}_x\left(e^{-\langle p, S_n^* \rangle} \phi(S_n^*, S_{n-1}^*, \dots, S_1^*)\right) .$$

Démonstration. On a

$$\mathbb{E}_x(\phi(S_n, S_{n-1}, \dots, S_1)) = \int \phi(s_n, s_{n-1}, \dots, s_1) \mu(dy_1) \dots \mu(dy_n) ,$$

où $s_k = x + y_1 + \dots + y_k$. En remplaçant chaque occurrence de μ par son expression en fonction de μ^* on obtient

$$\mathbb{E}_x(\phi(S_n, S_{n-1}, \dots, S_1)) = \rho^n e^{\langle p, x \rangle} \int e^{-\langle p, s_n \rangle} \phi(s_n, s_{n-1}, \dots, s_1) \mu^*(dy_1) \dots \mu^*(dy_n) .$$

\square

5.2 Encadrement du taux de décroissance de la probabilité de retour dans un compact

On rappelle la notation $\mu_{\vec{u}}(dy) = (1 + a(\|y\|) \langle \vec{u}, y \rangle) \mu(dy)$. On notera $L_{\vec{u}}$ la transformée de Laplace de la mesure $\mu_{\vec{u}}$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par

$$L_{\vec{u}}(x) = \int e^{\langle x, y \rangle} \mu_{\vec{u}}(dy) .$$

5.2.1 Majoration

En utilisant des méthodes classiques issues de la théorie des grandes déviations, on majore aisément le taux de décroissance exponentielle de la probabilité pour que la marche centrifuge se trouve dans un compact à l'instant n :

Théorème 5.3. *Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^d$, on a*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in K)^{1/n} \leq \inf_{\lambda > 0} \max_{\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}} L_{\vec{u}}(-\lambda \vec{u}) < 1.$$

La démonstration de ce théorème fait appel au lemme suivant qui est démontré dans [13] :

Lemme 5.4 ([13], Proposition 2). *Pour tout $\lambda > 0$, on a*

$$\mathbb{E}\left(e^{-\lambda \rho_n}\right) \leq \left(\max_{\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}} L_{\vec{u}}(-\lambda \vec{u})\right)^n.$$

De plus, $\inf_{\lambda > 0} \max_{\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}} L_{\vec{u}}(-\lambda \vec{u}) < 1$.

Démonstration du théorème 5.3. Soit K un compact de \mathbb{R}^d et $B(0, R)$ une boule contenant K . Pour tout nombre réel $\lambda > 0$, on a

$$\mathbb{P}(X_n \in K) \leq \mathbb{E}\left(e^{\lambda(R-\rho_n)}\right) = e^{\lambda R} \mathbb{E}\left(e^{-\lambda \rho_n}\right) \leq e^{\lambda R} \left(\max_{\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}} L_{\vec{u}}(-\lambda \vec{u})\right)^n.$$

Le résultat s'en déduit immédiatement. □

5.2.2 Minoration

Dans cette section, nous cherchons à minorer le taux de décroissance exponentielle de la probabilité pour que la marche centrifuge se trouve dans un compact à l'instant n ; c'est-à-dire minorer le nombre $\liminf_n \mathbb{P}(X_n \in K)^{1/n}$. Mais il est clair que l'on ne peut pas espérer obtenir un minorant non trivial qui soit valable pour n'importe quel compact K . Par exemple, la marche centrifuge plane issue de l'origine ne peut atteindre le compact $K = \{(1, 1)\}$ qu'en des temps n pairs, et le nombre $\liminf_n \mathbb{P}(X_n \in K)^{1/n}$ est alors nul. Pour bien poser le problème de la minoration, il est naturel de s'intéresser à une classe particulière de compacts. Le moins que l'on puisse exiger de la classe que l'on considère est que ses compacts soient, à n'importe quel instant, visités par la marche centrifuge avec une probabilité positive. Autrement dit, nous ne voulons considérer que des compacts K qui vérifient

$$(5.3) \quad \exists m \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq m, \quad \mathbb{P}(X_n \in K) > 0.$$

Pour des raisons liées aux techniques que nous utilisons, nous sommes amenés à restreindre notre étude à une sous-classe de la précédente. Nous dirons qu'un compact $K \in \mathbb{R}^d$ est *accueillant* pour la marche centrifuge si pour tout nombre réel $R > 0$ il existe un entier $b \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$(5.4) \quad \inf_{x \in B(0, R] \cap G} \mathbb{P}_x(X_b \in K) > 0.$$

Nous donnons maintenant des exemples de compacts accueillants.

Pour la marche centrifuge plane aux quatre plus proches voisins Dans ce cas les compacts accueillants et les compacts satisfaisant (5.3) sont les mêmes. Il s'agit simplement de tous les compacts qui contiennent deux points (x, y) et (x', y') de \mathbb{Z}^2 tous deux distincts de l'origine et tels que $x + y$ et $x' + y'$ aient une parité différente.

Pour des marches à densité Dans les cas les plus courants il existe beaucoup de compacts accueillants. Par exemple, si la mesure μ admet une densité strictement positive dans un voisinage de l'origine, alors tout compact d'intérieur non vide est accueillant.

Proposition 5.5. *Si μ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue qui est strictement positive dans un voisinage de l'origine, alors tout compact d'intérieur non vide est accueillant pour la marche centrifuge.*

Démonstration. Notons d'abord que sous les hypothèses de la proposition le support G de la marche aléatoire de loi μ est \mathbb{R}^d . Appelons f la densité de la loi μ et considérons un $\alpha > 0$ tel qu'on ait $f(u) > 0$ pour tout $u \in B(0, \alpha]$. Soient K un compact d'intérieur non vide de \mathbb{R}^d , $y \neq 0$ un point intérieur à K et $0 < \epsilon \leq \alpha/2$ tel que $0 \notin B(y, \epsilon] \subset K$. Nous allons d'abord démontrer que la boule $B(y, \epsilon]$ est stable pour la marche centrifuge, en ce sens que

$$(5.5) \quad \delta := \inf_{z \in B(y, \epsilon]} \mathbb{P}_z(X_1 \in B(y, \epsilon]) > 0 .$$

Pour ce faire, considérons la fonction F définie sur \mathbb{R}^d par la formule

$$F(z) = \mathbb{P}_z(X_1 \in B(y, \epsilon]) = \int \mathbb{1}_{B(y-z, \epsilon]}(u) (1 + a(\|u\|)\langle \vec{z}, u \rangle) \mu(du) .$$

Démontrons d'abord que F est continue sur $\mathbb{R}^d - \{0\}$. On a

$$\begin{aligned} |F(z) - F(z')| &\leq 2 \int |\mathbb{1}_{B(y-z, \epsilon]}(u) - \mathbb{1}_{B(y-z', \epsilon]}(u)| \mu(du) + \int \|u\| a(\|u\|) \|\vec{z} - \vec{z}'\| \mu(du) \\ &\leq 2 \int \mathbb{1}_{B(y-z, \epsilon] \Delta B(y-z', \epsilon]}(u) f(u) du + \|\vec{z} - \vec{z}'\| , \end{aligned}$$

si bien que pour démontrer la continuité de F il nous suffit d'établir que

$$(5.6) \quad \lim_{z' \rightarrow z} \int \mathbb{1}_{B(y-z, \epsilon] \Delta B(y-z', \epsilon]}(u) f(u) du = 0 .$$

La fonction sous le signe intégrale est dominée par f et, pour tout $u \notin \partial B(y-z, \epsilon]$, la fonction indicatrice sous le signe intégrale tend vers 0 quand z' tend vers z . Le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous assure donc que la relation (5.6) est vraie.

Puisque la boule $B(y, \epsilon]$ ne contient pas 0, la fonction F y est continue et il suffit maintenant de vérifier qu'elle ne s'y annule pas pour établir (5.5). Or, si $z \in B(y, \epsilon]$ est tel que $F(z) = 0$, alors μ -presque tout $u \in B(y-z, \epsilon]$ appartient à la demi-droite engendrée par \vec{z} . Cela est impossible car cette droite est négligeable, alors que $B(y-z, \epsilon]$ est incluse dans $B(0, \alpha]$ et a donc une μ -mesure positive.

Démontrons maintenant que K est accueillant. D'après le théorème 1.7, pour tout $R > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que l'on ait

$$\gamma := \inf_{x \in B(0, R] \cap G} \max_{n \leq N} \mathbb{P}_x(X_n \in B(y, \epsilon]) > 0 .$$

Si $x \in B(0, R] \cap G$, il existe donc $1 \leq n \leq N$ tel que $\mathbb{P}_x(X_n \in B(y, \epsilon]) \geq \gamma$. En utilisant la propriété de Markov de la marche centrifuge, on obtient alors

$$\mathbb{P}_x(X_N \in B(y, \epsilon]) \geq \mathbb{P}_x(X_n \in B(y, \epsilon]) \left(\inf_{z \in B(y, \epsilon]} \mathbb{P}_z(X_1 \in B(y, \epsilon]) \right)^{N-n} \geq \gamma \delta^N .$$

Cela prouve que

$$\inf_{x \in B(0, R] \cap G} \mathbb{P}_x(X_N \in B(y, \epsilon)) \geq \gamma \delta^N.$$

Ce qui achève la démonstration. \square

Après cette digression, nous revenons au problème de la minoration du taux de décroissance exponentielle. Une borne inférieure est donnée par le théorème suivant :

Théorème 5.6. *Pour tout compact accueillant $K \subset \mathbb{R}^d$, on a*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in K)^{1/n} \geq \sup_{\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}} \inf_{x \in \mathbb{R}^d} L_{\vec{u}}(x).$$

Démonstration. Soit K un compact accueillant de \mathbb{R}^d . On remarque d'abord que pour tout borélien H accessible à la marche centrifuge en a pas (*i.e.* $\mathbb{P}(X_a \in H) > 0$) et pour tout $R > 0$, on a

$$(5.7) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in K)^{1/n} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{x \in H} \mathbb{P}_x(\|X_n\| \leq R) \right)^{1/n}.$$

En effet, il existe par définition un entier b tel que

$$\inf_{y \in \mathbb{B}_R \cap G} \mathbb{P}_y(X_b \in K) > 0,$$

et la propriété de Markov de la marche centrifuge donne

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+a+b} \in K) &\geq \mathbb{P}(X_a \in H, \|X_{n+a}\| \leq R, X_{n+a+b} \in K) \\ &\geq \mathbb{P}(X_a \in H, \|X_{n+a}\| \leq R) \inf_{y \in \mathbb{B}_R \cap G} \mathbb{P}_y(X_b \in K) \\ &\geq \mathbb{P}(X_a \in H) \inf_{x \in H} \mathbb{P}_x(\|X_n\| \leq R) \inf_{y \in \mathbb{B}_R \cap G} \mathbb{P}_y(X_b \in K). \end{aligned}$$

On obtient la minoration (5.7) en faisant tendre n vers l'infini dans l'inégalité précédente après avoir pris la racine n -ième de chacun des membres.

La liberté de choix de H qu'apporte cette minoration va permettre de nous placer loin de l'origine, dans le voisinage d'une direction arbitraire $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$. On sait qu'alors la marche centrifuge adopte un comportement proche d'une vraie marche aléatoire de loi $\mu_{\vec{u}}$ pour laquelle la probabilité de retour dans une boule est « en $\rho_{\vec{u}}^n$ » (voir le corollaire 6.2 du chapitre 6). Il suffira alors de faire varier \vec{u} pour obtenir le théorème.

Notons S l'ensemble des vecteurs $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$ pour lesquels $\mu\{y \in \mathbb{R}^d : 1 + a(\|y\|)\langle \vec{u}, y \rangle = 0\} = 0$. Nous avons déjà vu que l'ensemble $\{y \in \mathbb{R}^d : 1 + a(\|y\|)\langle \vec{u}, y \rangle = 0\}$ est contenu dans la demi-droite pointée $\Delta_{\vec{u}} = \{-\lambda \vec{u} : \lambda > 0\}$. Comme la famille $\{\Delta_{\vec{u}} : \vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}\}$ est constituée de demi-droites deux à deux disjointes, celles ayant une μ -mesure positive sont au plus dénombrables. L'ensemble S est donc la sphère \mathbb{S}^{d-1} privée d'une famille au plus dénombrable de vecteurs. Fixons un vecteur $\vec{u} \in S$ et un nombre réel $\delta \in]0, 1[$ (proche de 1), et choisissons $\epsilon > 0$ tel que $\mu_{\vec{u}}\{y \in \mathbb{R}^d : 1 + a(\|y\|)\langle \vec{u}, y \rangle > \epsilon\} \geq \delta$. On notera A_δ l'ensemble $\{y \in \mathbb{R}^d : 1 + a(\|y\|)\langle \vec{u}, y \rangle > \epsilon\}$. Puisque l'expression $a(\|y\|)\langle \vec{u}, y \rangle$ est μ -presque sûrement bornée par 1, pour tout $\vec{x} \in \mathbb{S}^{d-1}$ et tout $y \in A_\delta$, on a

$$\frac{1 + a(\|y\|)\langle \vec{x}, y \rangle}{1 + a(\|y\|)\langle \vec{u}, y \rangle} \geq 1 - \frac{\|\vec{x} - \vec{u}\|}{1 + a(\|y\|)\langle \vec{u}, y \rangle} \geq 1 - \frac{\|\vec{x} - \vec{u}\|}{\epsilon}.$$

Si x appartient au cône ouvert $C(\vec{u}, (1 - \delta)\epsilon)$ de direction \vec{u} et d'ouverture $(1 - \delta)\epsilon$ défini par

$$C(\vec{u}, (1 - \delta)\epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} : \|\vec{x} - \vec{u}\| < (1 - \delta)\epsilon\},$$

alors, pour tout $y \in A_\delta$, on a $(1 + a(\|y\|)\langle \vec{x}, y \rangle) \geq \delta (1 + a(\|y\|)\langle \vec{u}, y \rangle)$, et par suite, pour toute fonction f borélienne positive, on a

$$(5.8) \quad \int f(y) \mu_{\vec{x}}(dy) \geq \delta \int_{A_\delta} f(y) \mu_{\vec{u}}(dy) \geq \delta^2 \int f(y) \mu_{\vec{u},\delta}(dy),$$

où $\mu_{\vec{u},\delta}$ désigne la mesure de probabilité $\mu_{\vec{u}}(A_\delta)^{-1} \mathbb{1}_{A_\delta} \mu_{\vec{u}}$. Afin d'alléger les formules, nous écrirons simplement C au lieu de $C(\vec{u}, (1 - \delta)\epsilon)$. Pour tout entier $n \geq 1$, tout nombre réel $R \geq 0$ et tout $x \in C$, on a

$$(5.9) \quad \begin{aligned} \mathbb{P}_x(\|X_n\| \leq R) &\geq \mathbb{P}_x(\|X_n\| \leq R, X_n \in C, \dots, X_1 \in C) \\ &= \mathbb{E}_x\left(\int \mathbb{1}_{C \cap \mathbb{B}_R}(X_{n-1} + y_n) \mu_{\vec{x}_{n-1}}(dy_n) \mathbb{1}_C(X_{n-1}) \dots \mathbb{1}_C(X_1)\right) \\ \text{(d'après (5.8))} &\geq \delta^2 \mathbb{E}_x\left(\int \mathbb{1}_{C \cap \mathbb{B}_R}(X_{n-1} + y_n) \mu_{\vec{u},\delta}(dy_n) \mathbb{1}_C(X_{n-1}) \dots \mathbb{1}_C(X_1)\right) \\ &\quad \vdots \\ &\geq \delta^{2n} \mathbb{P}_x(\|T_n\| \leq R, T_n \in C, \dots, T_1 \in C). \end{aligned}$$

où (T_n) est la marche aléatoire issue de $T_0 = X_0$ et de loi $\mu_{\vec{u},\delta}$. Supposons maintenant que la transformée de Laplace $L_{\vec{u},\delta}$ de la mesure $\mu_{\vec{u},\delta}$ possède un minimum $\rho_{\vec{u},\delta}$ atteint au point $p_{\vec{u},\delta}$, et notons (T_n^*) la marche aléatoire issue de T_0 et de loi relativisée $\mu_{\vec{u},\delta}^*$. En utilisant le corollaire 5.2, on obtient la minoration

$$(5.10) \quad \mathbb{P}_x(\|X_n\| \leq R) \geq \delta^{2n} \rho_{\vec{u},\delta}^n e^{-\|p_{\vec{u},\delta}\|(R+\|x\|)} \mathbb{P}_x(\|T_n^*\| \leq R, T_n^* \in C, \dots, T_1^* \in C).$$

D'après la proposition 6.1 il existe deux constantes $c = c(\vec{u}, \delta)$ et $R_0 = R_0(\vec{u}, \delta)$ telles que, pour tout compact H contenu dans $c\vec{u} + C$ et tout $R \geq R_0$, on ait

$$(5.11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{x \in H} \mathbb{P}_x(\|T_n^*\| \leq R, T_n^* \in C, \dots, T_1^* \in C) \right)^{1/n} = 1.$$

Avec de tels H et R , on peut donc passer à la limite dans l'inégalité (5.10) en utilisant (5.11) pour obtenir

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{x \in H} \mathbb{P}_x(\|X_n\| \leq R) \right)^{1/n} \geq \delta^2 \rho_{\vec{u},\delta}.$$

Vu la relation (5.7), le résultat précédent appliqué à un compact H suffisamment grand pour être visité par la marche centrifuge conduit finalement à

$$(5.12) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in K)^{1/n} \geq \delta^2 \rho_{\vec{u},\delta}.$$

Il nous reste à étudier l'existence et le comportement de $\rho_{\vec{u},\delta}$ en fonction de δ . Comme $\vec{u} \in S$, on a $\mu\{y : 1 + a(\|y\|)\langle \vec{u}, y \rangle > 0\} = 1$, donc la mesure $\mu_{\vec{u}}(dy) = (1 + a(\|y\|)\langle \vec{u}, y \rangle) \mu(dy)$ a même support que μ ; en particulier, le support de $\mu_{\vec{u}}$ n'est pas contenu dans un demi-espace fermé et sa transformée de Laplace $L_{\vec{u}}$ possède donc un minimum global strict $\rho_{\vec{u}} > 0$ (cf. proposition 5.1). Puisque le support de $\mu_{\vec{u}}$ est borné, pour tout x demeurant dans un compact, on a

$$|L_{\vec{u}}(x) - L_{\vec{u},\delta}(x)| \leq \kappa \int \left| 1 - \frac{\mathbb{1}_{A_\delta}(y)}{\mu_{\vec{u}}(A_\delta)} \right| \mu_{\vec{u}}(dy).$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, la valeur de l'intégrale précédente tend vers 0 lorsque δ tend vers 1 et il s'ensuit que $L_{\vec{u},\delta}$ converge vers $L_{\vec{u}}$ uniformément sur les compacts.

Donc, d'après le lemme C.2, pour tout δ suffisamment proche de 1, la fonction $L_{\vec{u},\delta}$ admet un minimum $\rho_{\vec{u},\delta}$ qui tend vers $\rho_{\vec{u}}$ lorsque δ tend vers 1. On déduit alors de (5.12) que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in K)^{1/n} \geq \rho_{\vec{u}} = \inf_{x \in \mathbb{R}^d} L_{\vec{u}}(x).$$

Le résultat se prolonge à tout vecteur \vec{u} de \mathbb{S}^{d-1} par continuité de $L_{\vec{u}}(x)$ en (\vec{u}, x) . \square

Par commodité, nous rassemblons dans un même énoncé les théorèmes 5.3 et 5.6 qui donnent un encadrement de la probabilité de retour dans un compact.

Théorème 5.7. *Pour tout compact accueillant $K \subset \mathbb{R}^d$, on a*

$$\sup_{\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}} \inf_{x \in \mathbb{R}^d} L_{\vec{u}}(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in K)^{1/n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in K)^{1/n} \leq \inf_{\lambda > 0} \max_{\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}} L_{\vec{u}}(-\lambda \vec{u}).$$

5.3 Cas d'égalité des bornes de l'encadrement ; théorème limite local

5.3.1 Marche centrifuge plane aux quatre plus proches voisins

Soit a un paramètre réel fixé entre 0 et 1. La marche centrifuge plane aux quatre plus proches voisins est la marche centrifuge sur \mathbb{Z}^2 dont la loi de base non perturbée $\mu = \frac{1}{4}(\delta_{\vec{e}_1} + \delta_{-\vec{e}_1} + \delta_{\vec{e}_2} + \delta_{-\vec{e}_2})$ est la loi des accroissements de la marche aléatoire simple aux quatre plus proches voisins sur \mathbb{Z}^2 , et dont la fonction de perturbation $a(\|\cdot\|)$ est constante et égale à a . Dans la suite de cette section, nous identifierons les vecteurs unitaires $\vec{u} = (\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbb{S}^1$ avec leur angle $\theta \in [0, 2\pi[$. Adaptant de manière évidente les notations des sections précédentes, nous obtenons par des calculs simples les expressions des mesures μ_θ et de leur transformée de Laplace L_θ :

$$(5.13) \quad \mu_\theta = \frac{1}{4} \left((1 + a \cos \theta) \delta_{\vec{e}_1} + (1 - a \cos \theta) \delta_{-\vec{e}_1} + (1 + a \sin \theta) \delta_{\vec{e}_2} + (1 - a \sin \theta) \delta_{-\vec{e}_2} \right),$$

$$(5.14) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad L_\theta(x, y) = \frac{1}{2} \left(\cosh x + a \cos \theta \sinh x + \cosh y + a \sin \theta \sinh y \right).$$

Théorème 5.8. *Pour la marche centrifuge plane aux quatre plus proches voisins, de paramètre $a \in [0, 1]$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in K)^{1/n} = \sqrt{\frac{2 - a^2}{2}},$$

quelle que soit la partie $K \subset \mathbb{Z}^2$ bornée et contenant au moins deux points (x, y) et (x', y') de \mathbb{Z}^2 distincts de l'origine et tels que $x + y$ et $x' + y'$ aient une parité différente.

Démonstration. D'après le théorème 5.7, il suffit de démontrer que

$$(5.15) \quad \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \inf_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} L_\theta(x, y) = \inf_{\lambda > 0} \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} L_\theta(-\lambda \theta) = \sqrt{\frac{2 - a^2}{2}}.$$

Commençons par chercher le minimum de la fonction L_θ . Lorsque $a = 1$ et $\theta = k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, la mesure μ_θ est portée par un demi-espace et l'on a donc $\inf_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} L_\theta(x, y) = 0$ (cf. lemme 5.1). Dans

tous les autres cas, la fonction L_θ possède un seul point critique (x_θ, y_θ) , avec $e^{x_\theta} = \sqrt{\frac{1-a \cos \theta}{1+a \cos \theta}}$ et $e^{y_\theta} = \sqrt{\frac{1-a \sin \theta}{1+a \sin \theta}}$; elle atteint son minimum en ce point et l'on a

$$L_\theta(x_\theta, y_\theta) = \frac{\sqrt{1-a^2 \cos^2 \theta} + \sqrt{1-a^2 \sin^2 \theta}}{2}.$$

Pour $\theta \in [0, 2\pi]$, posons $f(\theta) = \sqrt{1-a^2 \cos^2 \theta} + \sqrt{1-a^2 \sin^2 \theta}$. La fonction f est $\pi/2$ -périodique et, sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, son graphe possède un axe de symétrie en $\theta = \pi/4$. Pour étudier les variations de f , nous pouvons donc nous restreindre à l'intervalle $[0, \pi/4]$. Cette fonction est dérivable sur $]0, \pi/4[$ et sa dérivée

$$f'(\theta) = a^2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{1-a^2 \cos^2 \theta} - \frac{1}{1-a^2 \sin^2 \theta} \right),$$

est positive sur cet intervalle. La fonction f atteint donc son maximum en $\theta = \pi/4$ et par suite, on a

$$\max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} L_\theta(x, y) = L_{\pi/4}(x_{\pi/4}, y_{\pi/4}) = \sqrt{\frac{2-a^2}{2}}.$$

Pour terminer cette démonstration, nous allons prouver que l'on a

$$(5.16) \quad \inf_{\lambda > 0} \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} L_\theta(-\lambda\theta) \leq \sqrt{\frac{2-a^2}{2}}.$$

Observons que l'on a $(x_{\pi/4}, y_{\pi/4}) = -\lambda_0 (\cos \pi/4, \sin \pi/4)$, avec $\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\sqrt{2+a}}{\sqrt{2-a}}\right)$, si bien que pour démontrer (5.16), il suffit de vérifier que la fonction $\theta \mapsto L_\theta(-\lambda_0\theta)$ atteint son maximum en $\theta = \pi/4$. Pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, posons $g(\theta) = L_\theta(-\lambda\theta)$. Un calcul direct montre que

$$(5.17) \quad g(\theta) = \frac{1}{2} \left(\cosh(\lambda \cos \theta) - a \cos \theta \sinh(\lambda \cos \theta) \right. \\ \left. + \cosh(\lambda \sin \theta) - a \sin \theta \sinh(\lambda \sin \theta) \right).$$

La fonction g est $\pi/2$ -périodique et, sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, son graphe possède en axe de symétrie en $\theta = \pi/4$. Il nous suffit donc, pour atteindre notre but, de montrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0, \pi/4]$. Cette fonction est dérivable partout et, pour tout $\theta \in [0, \pi/4]$, on a

$$g'(\theta) = \frac{\cos \theta \sin \theta}{2} \left(h(\cos \theta) - h(\sin \theta) \right),$$

où $h(x) = -(\lambda - a) \frac{\sinh \lambda x}{x} + a \lambda \cosh \lambda x$. Pour montrer que g' est positive sur $[0, \pi/4]$, il suffit de montrer que h est croissante sur $[0, 1]$. Pour tout $x \in]0, 1]$, on a

$$h'(x) = (\lambda - a) \frac{\sinh \lambda x}{x^2} - (\lambda - a) \lambda \frac{\cosh \lambda x}{x} + a \lambda^2 \sinh \lambda x.$$

La fonction h' est du même signe que la fonction k définie par la formule

$$k(x) = a \lambda^2 x^2 \sinh \lambda x - \lambda(\lambda - a)x \cosh \lambda x + (\lambda - a) \sinh \lambda x.$$

On a $k(0) = 0$. Pour montrer que $k \geq 0$ sur $[0, 1]$, il suffit de montrer que $k' \geq 0$.

$$k'(x) = \lambda^2 x \left(a \lambda x \cosh \lambda x + (3a - \lambda) \sinh \lambda x \right).$$

La fonction k' est du même signe que la fonction l définie par la formule

$$l(x) = a\lambda x \cosh \lambda x + (3a - \lambda) \sinh \lambda x .$$

Comme $l(0) = 0$, il suffit de montrer que l' est positive sur $[0, 1]$. On a

$$l'(x) = \lambda \left((4a - \lambda) \cosh \lambda x + a\lambda x \sinh \lambda x \right) .$$

Et l'on voit que si $0 \leq \lambda \leq 4a$, alors l' est positive. Cela est vrai en particulier pour $\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\sqrt{2}+a}{\sqrt{2}-a}\right)$ et la proposition est démontrée. \square

5.3.2 Marches centrifuges de loi invariante par rotation

Pour terminer ce chapitre, nous présentons un autre cas où les deux bornes de l'encadrement du taux de décroissance exponentielle sont égales.

Théorème 5.9. *Pour toute mesure de probabilité μ , invariante par les rotations vectorielles, et pour toute fonction de perturbation a , on a*

$$\inf_{\lambda > 0} \max_{\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}} L_{\vec{u}}(-\lambda \vec{u}) = \sup_{\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}} \inf_{x \in \mathbb{R}^d} L_{\vec{u}}(x) ,$$

et leur valeur commune est égale à

$$\inf_{\lambda > 0} L_{\vec{u}}(-\lambda \vec{u}) ,$$

quel que soit $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Démonstration. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de \mathbb{S}^{d-1} et R une rotation vectorielle qui envoie \vec{u} sur \vec{v} . Un calcul élémentaire utilisant l'invariance de μ par la rotation R montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$(5.18) \quad L_{\vec{v}}(Rx) = L_{\vec{u}}(x) .$$

Puisque la rotation R est une bijection, nous déduisons de l'égalité précédente que

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^d} L_{\vec{v}}(x) = \inf_{x \in \mathbb{R}^d} L_{\vec{u}}(x) .$$

Autrement dit, la quantité $\inf_{x \in \mathbb{R}^d} L_{\vec{u}}(x)$ est indépendante de la direction \vec{u} . De la même manière, en appliquant (5.18) au point $x = -\lambda \vec{u}$, il vient

$$L_{\vec{v}}(-\lambda \vec{v}) = L_{\vec{u}}(-\lambda \vec{u}) .$$

La quantité $L_{\vec{u}}(-\lambda \vec{u})$ est donc indépendante de la direction \vec{u} , si bien que démontrer la proposition revient à démontrer que

$$(5.19) \quad \inf_{\lambda > 0} L_{e_1}(-\lambda e_1) = \inf_{x \in \mathbb{R}^d} L_{e_1}(x) .$$

Pour obtenir la relation (5.19), il suffit de démontrer que, pour tout réel $\lambda > 0$, le minimum de L_{e_1} sur la sphère $\mathbb{S}^{d-1}(\lambda)$ de rayon λ est atteint au point $-\lambda e_1$; soit encore, que la quantité $L_{e_1}(R\lambda e_1)$, où R est une rotation vectorielle de \mathbb{R}^d , est minimale lorsque R est une rotation qui envoie le vecteur e_1 sur le vecteur $-e_1$. D'après (5.18), on a

$$(5.20) \quad L_{e_1}(R\lambda e_1) = L_{R^{-1}e_1}(\lambda e_1) = L(\lambda e_1) + \langle R^{-1}e_1, \phi(\lambda) \rangle ,$$

où L est la transformée de Laplace de la mesure μ et

$$\phi(\lambda) = \int e^{\lambda \langle e_1, y \rangle} a(\|y\|) y \mu(dy) .$$

Quand R décrit le groupe des rotations vectorielles, le vecteur $R^{-1}e_1$ décrit la sphère \mathbb{S}^{d-1} ; donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la quantité $L_{e_1}(R\lambda e_1)$ est minimale lorsque $R^{-1}e_1 = -\vec{\phi}(\lambda)$. Il ne reste plus qu'à vérifier que $\vec{\phi} = e_1$. Calculons donc les coordonnées du vecteur $\phi(\lambda)$. Pour tout $i = 2 \dots d$, soit S_i la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $x_i = 0$. Elle envoie le vecteur e_i sur son opposé $-e_i$ et laisse invariant tous les autres vecteurs de la base canonique. On a donc

$$\begin{aligned} \langle e_i, \phi(\lambda) \rangle &= \int e^{\lambda \langle e_1, y \rangle} a(\|y\|) \langle e_i, y \rangle \mu(dy) \\ &= - \int e^{\lambda \langle S e_1, y \rangle} a(\|y\|) \langle S e_i, y \rangle \mu(dy) \\ &= - \int e^{\lambda \langle e_1, S y \rangle} a(\|S y\|) \langle e_i, S y \rangle \mu(dy) . \end{aligned}$$

Puisque la mesure de probabilité μ est invariante par toute rotation, elle est aussi invariante par toute symétrie orthogonale et l'on obtient

$$\langle e_i, \phi(\lambda) \rangle = - \int e^{\lambda \langle e_1, y \rangle} a(\|y\|) \langle e_i, y \rangle \mu(dy) = - \langle e_i, \phi(\lambda) \rangle .$$

La quantité $\langle e_i, \phi(\lambda) \rangle$ ne peut donc qu'être nulle. Calculons la première coordonnée de $\phi(\lambda)$. On a

$$\begin{aligned} \langle e_1, \phi(\lambda) \rangle &= \int e^{\lambda \langle e_1, y \rangle} a(\|y\|) \langle e_1, y \rangle \mu(dy) \\ &= \int_{\langle e_1, y \rangle \neq 0} e^{\lambda \langle e_1, y \rangle} a(\|y\|) \langle e_1, y \rangle \mu(dy) . \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau l'invariance de μ par rotation et en considérant une rotation qui envoie e_1 sur $-e_1$, on obtient

$$\int_{\langle e_1, y \rangle < 0} e^{\lambda \langle e_1, y \rangle} a(\|y\|) \langle e_1, y \rangle \mu(dy) = - \int_{\langle e_1, y \rangle > 0} e^{-\lambda \langle e_1, y \rangle} a(\|y\|) \langle e_1, y \rangle \mu(dy) .$$

En découpant le domaine d'intégration en les deux demi-espaces ouverts et en utilisant la relation précédente, il vient :

$$\langle e_1, \phi(\lambda) \rangle = 2 \int_{\langle e_1, y \rangle > 0} \sinh(\lambda \langle e_1, y \rangle) a(\|y\|) \langle e_1, y \rangle \mu(dy) .$$

Exprimée sous cette forme, la quantité $\langle e_1, \phi(\lambda) \rangle$ apparaît clairement positive. Ainsi, nous avons démontré que le vecteur $\phi(\lambda)$ est colinéaire au vecteur e_1 et de même sens. Il s'ensuit que $\vec{\phi}(\lambda) = e_1$ et la proposition est démontrée. \square

Chapitre 6

Sur le temps de sortie d'un cône pour une marche aléatoire

Résumé. Soit C un cône de \mathbb{R}^d et B une boule centrée en l'origine. Nous considérons une marche aléatoire centrée de carré intégrable et démontrons que la probabilité qu'elle se trouve dans la boule B à l'instant n sans avoir jamais quitté le cône C ne décroît pas à vitesse exponentielle.

6.1 Introduction

Soit \mathcal{L} une loi de probabilité sur \mathbb{R}^d de moyenne μ et de matrice de covariance Γ définie positive. Nous posons $\mathbb{P} = \mathcal{L}^{\otimes \mathbb{N}}$ et nous considérons la famille d'espaces de probabilité $\{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_x), x \in \mathbb{R}^d\}$, où $\Omega = \{(\xi_n)_{n \geq 0} : \xi_n \in \mathbb{R}^d\}$ et $\mathbb{P}_x = \delta_x \otimes \mathbb{P}$. Notons $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ les fonctions coordonnées sur Ω et posons $S_n = \xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n$. Sous \mathbb{P}_x , la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est une marche aléatoire issue de x dont les accroissements indépendants $\{\xi_n, n \geq 1\}$ suivent la loi \mathcal{L} .

Soit C un cône de \mathbb{R}^d issu de 0, convexe et d'intérieur non vide, et soit $T_C = \inf\{n \geq 1 : S_n \notin C\}$ le temps de première sortie du cône C .

Nous fixons une direction \vec{u} intérieure à C et, pour tout nombre réel δ , nous posons $C_\delta = \delta\vec{u} + C$. Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant :

Théorème 6.1. *Si $\mu = 0$, alors il existe deux nombres réels positifs R_0 et δ tels que pour tout compact $K \subset C_\delta$ on ait*

$$(6.1) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{x \in K} \mathbb{P}_x(\|S_n\| \leq R_0; T_C > n)^{1/\sqrt{n}} > 0.$$

Les constantes δ et R_0 dépendent de la loi \mathcal{L} et du cône C et peuvent être interprétées de la façon suivante :

- pour que la marche puisse rester dans le cône pendant un certain temps, il peut être nécessaire qu'elle soit issue d'un point suffisamment éloigné du bord de C : le cône translaté C_δ joue le rôle d'un cône de sécurité. Si la marche issue de 0 reste dans C et atteint son intérieur à l'instant n avec une probabilité positive, c'est-à-dire si $\mathbb{P}_0(S_n \in C^\circ; T_C > n) > 0$, alors le résultat du théorème est vrai avec $\delta = 0$.
- il se peut que la marche ne puisse pas s'approcher trop près de l'origine sans quitter le cône ; cela justifie l'existence d'une distance critique R_0 .

Quelques détails sont donnés dans la section 6.5 de ce chapitre.

Une conséquence immédiate du théorème concerne le comportement de la quantité (6.1) dans le cas décentré (*i.e.* $\mu \neq 0$). Si la loi \mathcal{L} possède tous les moments exponentiels et si son support n'est

pas contenu dans un demi-espace, alors sa transformée de Laplace $L(x) = \int e^{\langle x,y \rangle} \mathcal{L}(dy)$ possède un minimum $\rho_{\mathcal{L}} \in]0, 1[$ atteint en un unique point $p \in \mathbb{R}^d$ et la mesure de probabilité $\mathcal{L}^*(dy) = \rho_{\mathcal{L}}^{-1} e^{\langle p,y \rangle} \mathcal{L}(dy)$ est centrée. Ce procédé classique de recentrage permet de déduire facilement du théorème le corollaire suivant :

Corollaire 6.2. *Si $\mu \neq 0$ et si la loi \mathcal{L} possède tous les moments exponentiels, alors il existe deux nombres réels positifs R_0 et δ tels que pour tout point $x \in C_\delta$ on ait*

$$(6.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_x(\|S_n\| \leq R_0; T_C > n)^{1/n} = \rho_{\mathcal{L}},$$

où $\rho_{\mathcal{L}}$ est le minimum de la transformée de Laplace de la mesure \mathcal{L} .

Notons que la limite apparaissant dans (6.2) ne dépend pas du cône choisi.

La recherche d'un équivalent de la quantité $\mathbb{P}_x(T_C > n)$ lorsque n tend vers l'infini (pour un $x \in C$ fixé) est un sujet ancien qui a fait l'objet de nombreux travaux. Un premier résultat obtenu par F. Spitzer ([31], Theorem 3.5) en dimension 1 pour $C =]0, +\infty[$, et désormais classique, dit que $\mathbb{P}_0(T_C > n)$ est équivalent à $cn^{-1/2}$ lorsque la loi \mathcal{L} est aperiodique, centrée, et possède un moment d'ordre 2. En fait, on sait précisément que $\mathbb{P}_0(T_C = n)$ est équivalent à $(c/2)n^{-3/2}$ (Borovkov [4], Corollary 9), et c'est grâce à cette estimation que D. Iglehart a pu donner la première démonstration du principe d'invariance pour une marche aléatoire conditionnée à rester positive ([18]). La démonstration que donne F. Spitzer du premier résultat utilise la factorisation de Wiener-Hopf; par les mêmes méthodes, D. Iglehart démontre¹ que la quantité $\mathbb{P}_0(\phi(S_n); T_C > n)$ (où ϕ est une fonction de la variable réelle à support compact) est équivalente à $cn^{-3/2}$. Ce résultat intervient de façon essentielle pour l'obtention d'un théorème limite local sur le groupe affine de la droite réelle ([21]) ou dans l'étude des probabilités d'extinction de processus de branchement en milieu aléatoire ([15]). Des résultats du même ordre existent en dimension supérieure lorsque C est un demi-espace; ils permettent par exemple d'obtenir un théorème limite local pour les marches aléatoires centrées sur le groupe des matrices triangulaires supérieures d'ordre 2 ([22]). Des travaux plus récents, dûs à N. Varopoulos [33], montrent qu'en toute dimension $\mathbb{P}_x(\phi(S_n); T_C > n)$ décroît à vitesse polynomiale vers 0 lorsque des hypothèses convenables² sont faites sur la loi \mathcal{L} et la position du cône (qui doit être adaptée à la loi \mathcal{L}).

L'une de nos motivations pour étudier la quantité (6.2) est liée à l'étude de la marche centrifuge. Lorsque le temps tend vers l'infini, la marche centrifuge est « piégée » dans des cônes d'ouvertures arbitrairement petites et ses transitions sont alors proches de celles d'une vraie marche aléatoire. Si l'on s'intéresse au comportement asymptotique de $\mathbb{P}(X_n \in K)$ (où K est un compact de \mathbb{R}^d), on est alors naturellement amené à estimer des quantités du même type que (6.2). En utilisant ces idées et le corollaire, nous avons pu établir (cf. chapitre 5) que la marche centrifuge plane aux quatre plus proches voisins de paramètre $a \in [0, 1]$ vérifie $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in K)^{1/n} = \sqrt{\frac{2-a^2}{2}}$; ce qui répond à une question soulevée dans [13].

1. Pour être tout à fait précis, D. Iglehart s'intéresse dans [19] à une marche aléatoire de moyenne négative avec des moments exponentiels; il démontre que la quantité $\mathbb{P}(S_n \in K; T_C > n)$ décroît en $n^{-3/2} \rho^n$, où ρ est le minimum de la transformée de Laplace de la loi des accroissements. Dans [21], E. Le Page et M. Peigné lui attribuent cependant le résultat pour une marche centrée et montrent comment celui-ci s'obtient à l'aide des méthodes développées par D. Iglehart.

2. N. Varopoulos étudie d'abord le cas où \mathcal{L} est à support borné, portée par un réseau ou absolument continue, puis étend ses résultats à une classe particulière de lois ayant un support non borné et des moments d'ordre grand (cf. [33], section 6.2). Le cône doit se trouver en *position générale* relativement à la loi \mathcal{L} (cf. [33], section 0.7).

6.2 Cône de sécurité

On suppose maintenant que la marche est centrée (*i.e.* $\mu = 0$). Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, le cône translaté C_δ qui apparaît dans l'énoncé du théorème 6.1 doit être interprété comme un « cône de sécurité » permettant à la marche qui en est issue de rester dans C pendant un temps arbitrairement long. D'un point de vue strictement technique, le cône C_δ apparaît d'abord dans le lemme suivant qui est un ingrédient essentiel de la démonstration du théorème.

Lemme 6.3. *Il existe un entier $a \geq 1$, une boule fermée $B(z, r]$ contenue dans C^o et un réel $\delta \geq 0$ tels que*

$$\mathbb{P}_0(S_a \in B(z, r]; S_1, \dots, S_a \in C_{-\delta}) > 0.$$

Démonstration. Soit N une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0, \Gamma)$. Comme la suite $(n^{-1/2}S_n)$ converge en loi vers N , en utilisant l'invariance du cône par homothétie puis le théorème de Portemanteau, on obtient

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0(S_n \in C^o) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0(n^{-1/2}S_n \in C^o) \geq \mathbb{P}_0(N \in C^o) > 0.$$

On peut donc choisir un entier $a \geq 1$ tel que $\mathbb{P}_0(S_a \in C^o) > 0$. Il existe alors une boule fermée $B(z, r]$ contenue dans C^o telle que $\mathbb{P}_0(S_a \in B(z, r]) > 0$, et le résultat annoncé se déduit simplement du fait que

$$\lim_{\delta \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_0(S_a \in B(z, r]; S_1, \dots, S_a \in C_{-\delta}) = \mathbb{P}_0(S_a \in B(z, r)).$$

□

Nous allons expliquer maintenant de manière informelle les méthodes que nous emploierons pour démontrer le théorème 6.1. Considérons un entier $a \geq 1$, une boule $B(z, r] \subset C^o$ et un réel $\delta \geq 0$ tels que

$$\alpha = \mathbb{P}_0(S_a \in B(z, r]; S_1, \dots, S_a \in C_{-\delta}) > 0.$$

Quel que soit $x \in \mathbb{R}^d$, on obtient par translation

$$(6.3) \quad \alpha = \mathbb{P}_x(S_a \in x + B(z, r]; S_1, \dots, S_a \in x + C_{-\delta}).$$

Or, si x appartient à C_δ , alors $x + C_{-\delta} \subset C$ et $x + B(z, r] \subset C_\delta$; donc

$$\mathbb{P}_x(S_a \in C_\delta; T_C > a) \geq \alpha.$$

Autrement dit, partant de C_δ , la marche reste dans C jusqu'à l'instant a et se retrouve à nouveau dans C_δ à cet instant avec une probabilité $\geq \alpha$. Elle peut alors repartir dans les mêmes conditions pour un tour dans C d'une durée a se terminant dans C_δ ; et en répétant l'opération k fois, on voit en particulier que

$$\mathbb{P}_x(T_C > ka) \geq \alpha^k > 0.$$

Cela justifie l'idée de « cône de sécurité » introduite au début de cette section. Reprenons ce raisonnement en prêtant plus d'attention à la condition $S_a \in x + B(z, r)$. D'après (6.3), pour tout $x \in C_\delta$, on a

$$\mathbb{P}_x(S_a \in x + B(z, r]; T_C > a) \geq \alpha;$$

ce qui veut dire que la marche partant de C_δ fait un tour dans C d'une durée a se terminant dans C_δ en ayant finalement avancé d'une direction $\in B(z, r]$, et tout cela avec une probabilité $\geq \alpha$. En répétant l'opération k fois, on obtient

$$(6.4) \quad \mathbb{P}_x(S_{ka} \in x + kB(z, r]; T_C > ka) \geq \alpha^k.$$

La marche reste dans C et s'éloigne de l'origine d'une distance $O(k)$ en un temps $O(k)$ avec une probabilité $\geq \alpha^k$. Afin de bien comprendre l'intérêt de ce résultat, voyons comment il peut être utilisé pour démontrer que, pour tout $x \in C_\delta$, on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_x(T_C > n)^{1/\sqrt{n}} > 0 .$$

Notons $\{\mathcal{S}_n(t), t \in [0, 1]\}$ le processus à trajectoires continues valant S_k/\sqrt{n} aux instants $t = k/n$ et interpolé linéairement ailleurs. Par invariance par changement d'échelle et convexité de C , on a

$$\mathbb{P}_x(T_C > n) = \mathbb{P}_0(\forall t \in [0, 1], n^{-1/2}x + \mathcal{S}_n(t) \in C) ,$$

et en utilisant le fait que la suite $(n^{-1/2}x + \mathcal{S}_n)$ converge en loi vers le mouvement brownien issu de 0, on peut démontrer à l'aide du théorème de Portemanteau que $\mathbb{P}_x(T_C > n)$ converge vers la probabilité pour que le mouvement brownien issu du sommet de C reste dans ce cône pendant une unité de temps. Mais comme cette probabilité est nulle, cela n'apporte pas d'information nouvelle. On peut néanmoins tirer parti de la convergence de \mathcal{S}_n vers le mouvement brownien : si on utilise la relation (6.4) avec $k = \sqrt{n}$ pour forcer la marche à s'éloigner d'abord de l'origine d'une distance $O(\sqrt{n})$, on obtient

$$\mathbb{P}_x(T > n) \geq \alpha^{\sqrt{n}} \inf_{y \in x + \sqrt{n}B(z,r)} \mathbb{P}_y(T_C > n - a\sqrt{n})$$

donc

$$\mathbb{P}_x(T > n) \geq \alpha^{\sqrt{n}} \inf_{u \in B(z,r)} \mathbb{P}_0(\forall t \in [0, 1], n^{-1/2}x + u + \mathcal{S}_n(t) \in C) .$$

Comme le mouvement brownien issu d'un point $u \in C^o$ reste dans C pendant une unité de temps avec une probabilité positive, on déduit du théorème de Portemanteau que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{u \in B(z,r)} \mathbb{P}_0(\forall t \in [0, 1], n^{-1/2}x + u + \mathcal{S}_n(t) \in C) > 0 ;$$

d'où

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_x(T_C > n)^{1/\sqrt{n}} \geq \alpha > 0 .$$

Nous allons appliquer cette méthode à l'étude de la quantité

$$p_n(R) = \mathbb{P}_x(\|S_n\| \leq R; T_C > n) .$$

Cela ne peut être fait directement car l'étape de renormalisation, qui permet de se ramener au processus \mathcal{S}_n , conduit à minorer la quantité précédente par $\alpha^{\sqrt{n}}$ que multiplie une expression de la forme

$$\ll \inf_{u \in B(z,r)} \mathbb{P}_0(\|u + \mathcal{S}_n(1)\| \leq \frac{R}{\sqrt{n}}; \forall t \in [0, 1], u + \mathcal{S}_n(t) \in C) \gg$$

qui tend vers 0 en même temps que R/\sqrt{n} . Cependant, cette méthode permet de montrer que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} p_n(\sqrt{n})^{1/\sqrt{n}} \geq \alpha .$$

L'étape suivante consiste alors à comparer $p_n(R)$ avec $p_n(\sqrt{n})$. S'il existait une constante $C > 0$, indépendante de n et de R , telle que l'on ait $p_n(R+1) \leq Cp_n(R)$ pour tout R suffisamment grand, alors on aurait (approximativement) $p_n(\sqrt{n}) \leq C^{\sqrt{n}}p_n(R)$ et cela suffirait à conclure. C'est ce type d'argument que nous allons utiliser, à ceci près que, dans la définition de p_n , les boules usuelles (c'est-à-dire la norme euclidienne) seront remplacées par des ensembles mieux adaptés à la géométrie du problème.

On rappelle que \vec{u} est un vecteur unitaire intérieur à C . On peut donc choisir un cône ouvert $D = \{x \in \mathbb{R}^d : \|\vec{x} - \vec{u}\| < \lambda\}$ de direction \vec{u} et d'ouverture $0 < \lambda < \sqrt{2}$ suffisamment petite pour que D soit contenu dans C . Pour tous $\epsilon, R \geq 0$, on note $D_\epsilon = \epsilon\vec{u} + D$ et $D_\epsilon(R) = \{x \in D_\epsilon : |\langle x, \vec{u} \rangle| \leq R\}$.

Par le choix de $\lambda < \sqrt{2}$, les ensembles $D_\epsilon(R)$ sont des parties bornées de \mathbb{R}^d , et il est donc équivalent de démontrer le théorème 6.1 avec la condition $\|S_n\| \leq R$ ou bien avec la condition $S_n \in D_\epsilon(R)$ ³.

6.3 Probabilité de retour à une distance inférieure à la racine carrée du temps sans jamais quitter le cône

On rappelle que \mathcal{C}_1 est l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R}^d muni de sa tribu borélienne. On note $\{X(t), t \in [0, 1]\}$ le processus des coordonnées sur \mathcal{C}_1 et W_x la loi du mouvement brownien de matrice de covariance Γ issu d'un point $x \in \mathbb{R}^d$.

Lemme 6.4. *Soient $x \in C^o$ et $0 \leq \epsilon < 1$. Si (W_n) est une suite de mesures de probabilité sur \mathcal{C}_1 qui converge étroitement vers W_x , alors*

$$(6.5) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} W_n(X(1) \in D_\epsilon(1); \forall t \in [0, 1], X(t) \in C) > 0.$$

Démonstration. Posons $O = \{X(1) \in D_\epsilon(1)^o; \forall t \in [0, 1], X(t) \in C^o\}$. D'après le théorème de Portemanteau, on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} W_n(O) \geq W_x(O),$$

car l'ensemble O est un ouvert de \mathcal{C}_1 . Puisque x appartient à C^o et que $D_\epsilon(1)^o$ est non vide et contenu dans C^o , on peut trouver une fonction $w \in O$ telle que $w(0) = x$ (par exemple, en paramétrant le segment joignant x à un point de $D_\epsilon(1)^o$). Or, tout voisinage d'une fonction continue issue de x possède une W_x -mesure positive, donc c'est le cas pour O et le lemme est démontré. \square

À partir de maintenant, nous fixons l'entier $a \geq 1$, la boule fermée $B(z, r)$ et le réel $\delta \geq 0$ donnés par le lemme 6.3 et nous posons $\alpha = \mathbb{P}_0(S_a \in B(z, r); S_1, \dots, S_a \in C_{-\delta})$. Dans toute la suite, nous noterons $[s]$ la partie entière d'un nombre réel s .

Proposition 6.5. *Pour tout compact $K \subset C_\delta$ et tout $\epsilon \geq 0$, on a*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{x \in K} \mathbb{P}_x(S_n \in D_\epsilon(\sqrt{n}); T_C > n)^{1/\sqrt{n}} \geq \alpha.$$

Démonstration. Pour tout entier $k \geq 0$, on définit les événements

$$A_k = \{S_{ak+a} - S_{ak} \in B(z, r); S_{ak+i} - S_{ak} \in C_{-\delta}, i = 1 \dots a\}$$

et

$$B_k = \{S_{ak+a} - S_{ak} \in B(z, r); S_{ak+i} \in C, i = 1 \dots a\}.$$

Puisque $C_\delta + C_{-\delta} \subset C$, les relations $S_{ak} \in C_\delta$ et $S_{ak+i} - S_{ak} \in C_{-\delta}$ impliquent $S_{ak+i} \in C$. D'autre part, si $S_{ak} \in C_\delta$ et $S_{ak+a} - S_{ak} \in B(z, r)$, alors $S_{ak+a} \in C_\delta$ car $B(z, r) \subset C$ et $C_\delta + C \subset C_\delta$. On a donc

$$\{S_{ak} \in C_\delta\} \cap A_k \subset B_k \cap \{S_{ak+a} \in C_\delta\}.$$

3. On aurait pu se passer d'introduire un sous-cône D et travailler avec les ensembles $C_\epsilon(R) = \{x \in C_\epsilon : |\langle x, \vec{u} \rangle| \leq R\}$, qui présentent les mêmes propriétés, sauf dans le cas où C est un demi-espace car $C_\epsilon(R)$ n'est alors pas bornée. L'introduction de D permet aussi d'éviter la confusion entre le cône de sécurité C_δ et les « boules » $C_\epsilon(R)$ qui ont une interprétation très différente.

En appliquant cette relation pour $k = 0 \dots l - 1$, on obtient successivement :

$$\begin{aligned}
& \{S_0 \in C_\delta\} \cap A_0 \subset B_0 \cap \{S_a \in C_\delta\}; \\
& \{S_0 \in C_\delta\} \cap A_0 \cap A_1 \subset B_0 \cap \{S_a \in C_\delta\} \cap A_1 \subset B_0 \cap B_1 \cap \{S_{2a} \in C_\delta\}; \\
& \quad \vdots \\
(6.6) \quad & \{S_0 \in C_\delta\} \cap \left(\bigcap_{k=0}^{l-1} A_k \right) \subset \bigcap_{k=0}^{l-1} B_k .
\end{aligned}$$

Et puisque

$$\bigcap_{k=0}^{l-1} B_k \subset \{S_{al} \in S_0 + B(lz, lr); S_i \in C, i = 1 \dots al\},$$

il vient, pour tout $x \in C_\delta$ et tout $n \geq la$,

$$\begin{aligned}
(6.7) \quad & \mathbb{P}_x(S_n \in D_\epsilon(\sqrt{n}); T_C > n) \\
& \geq \mathbb{P}_x(\bigcap_{k=0}^{l-1} A_k; S_n \in D_\epsilon(\sqrt{n}); S_n, \dots, S_{al+1} \in C) \\
& \geq \mathbb{P}_x(\bigcap_{k=0}^{l-1} A_k) \inf_{y \in B(x+lz, lr)} \mathbb{P}_y(S_{n-al} \in D_\epsilon(\sqrt{n}); S_i \in C, i = 1 \dots n - al) \\
& \geq \alpha^l \inf_{u \in B(z, r)} \mathbb{P}_0(x + lu + S_{n-al} \in D_\epsilon(\sqrt{n}); x + lu + S_i \in C, i = 1 \dots n - al)
\end{aligned}$$

Pour tout $n \geq 1$, on note $\{\mathcal{S}_n(t), t \in [0, 1]\}$ le processus à trajectoires continues valant S_k/\sqrt{n} aux instants $t = k/n$ et interpolé linéairement ailleurs. Posons $k_n = n - a[\sqrt{n}]$ et $y_n(x, u) = k_n^{-1/2}(x + [\sqrt{n}]u)$. Fixons $0 < \epsilon' < 1$ et supposons que n soit assez grand pour que $k_n^{-1/2}D_\epsilon(\sqrt{n})$ contienne $D_{\epsilon'}(1)$. On a alors

$$\{x + [\sqrt{n}]u + S_{k_n} \in D_\epsilon(\sqrt{n})\} \supset \{y_n(x, u) + \mathcal{S}_{k_n}(1) \in D_{\epsilon'}(1)\};$$

et puisque C est invariant par homothétie et convexe on a aussi

$$\{x + [\sqrt{n}]u + S_i \in C, i = 1 \dots k_n\} = \{\forall t \in [0, 1], y_n(x, u) + \mathcal{S}_{k_n}(t) \in C\}.$$

En utilisant la relation (6.7) avec $l = [\sqrt{n}]$ on en déduit que

$$\begin{aligned}
(6.8) \quad & \mathbb{P}_x(S_n \in D_\epsilon(\sqrt{n}); T_C > n) \\
& \geq \alpha^{[\sqrt{n}]} \inf_{u \in B(z, r)} \underbrace{\mathbb{P}_0(y_n(x, u) + \mathcal{S}_{k_n}(1) \in D_{\epsilon'}(1); \forall t \in [0, 1], y_n(x, u) + \mathcal{S}_{k_n}(t) \in C)}_{p_n(x, u)}.
\end{aligned}$$

D'après le principe d'invariance de Donsker, la suite (\mathcal{S}_{k_n}) converge en loi sur \mathcal{C}_1 vers le mouvement brownien; si (x_n) et (u_n) sont deux suites de \mathbb{R}^d convergeant respectivement vers x et u , alors la suite $(y_n(x_n, u_n))$ converge vers u et la suite de processus $(y_n(x_n, u_n) + \mathcal{S}_{k_n})$ converge en loi vers le mouvement brownien issu de u d'après le lemme de Slutsky. Si u est à l'intérieur de C , le lemme 6.4 montre alors que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} p_n(x_n, u_n) > 0.$$

Par conséquent, pour tout compact $K \subset C_\delta$, on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{x \in K} \inf_{u \in B(z, r)} p_n(x, u) > 0,$$

et, vu la minoration (6.8), le résultat de la proposition s'en déduit immédiatement. \square

6.4 Probabilité de retour dans une boule sans jamais quitter le cône

Le lemme suivant est un ingrédient essentiel de la démonstration du théorème 6.1.

Lemme 6.6. *Il existe un entier $b \geq 1$ et deux nombres réels $R_0 > \epsilon > 0$ tels que*

$$\inf_{R \geq R_0} \inf_{x \in D_\epsilon(R+1)} \mathbb{P}_x(S_b \in D_\epsilon(R); T_C > b) > 0 .$$

Démonstration. Nous allons d'abord démontrer qu'il existe un entier $b \geq 1$ et deux nombres réels $R_0 > \epsilon > 0$ tels que

$$(6.9) \quad \inf_{x \in D_\epsilon(R_0+1)} \mathbb{P}_x(S_b \in D_\epsilon(R_0); T_C > b) > 0 ,$$

puis nous en déduisons le lemme par un argument géométrique.

Fixons un nombre réel $0 < \epsilon' < 1$ et posons

$$p_n(y) = \mathbb{P}_0(y + n^{-1/2}S_n \in D_{\epsilon'}(1); y + n^{-1/2}S_i \in C, i = 1 \dots n) .$$

D'après le lemme 6.4, si (y_n) est une suite qui converge vers un point intérieur à C , alors

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} p_n(y_n) > 0 .$$

Par un argument de compacité, on en déduit que pour tout compact $K \subset C^\circ$ on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{y \in K} p_n(y) > 0 .$$

Pour $K = \overline{D_{\epsilon'}(2)}$, choisissons un entier $b \geq 1$ tel que $\inf_{y \in \overline{D_{\epsilon'}(2)}} p_b(y) > 0$. Puisque $p_b(y)$ s'écrit aussi

$$p_b(y) = \mathbb{P}_{\sqrt{b}y}(S_b \in D_{\epsilon'\sqrt{b}}(\sqrt{b}); T_C > b) ,$$

et que $\sqrt{b} \overline{D_{\epsilon'}(2)} = \overline{D_{\epsilon'\sqrt{b}}(2\sqrt{b})}$ contient $D_{\epsilon'\sqrt{b}}(\sqrt{b} + 1)$, nous venons de démontrer la relation (6.9) avec $R_0 = \sqrt{b}$ et $\epsilon = \epsilon'\sqrt{b}$.

Pour la suite de cette démonstration, nous noterons

$$\gamma = \inf_{x \in D_\epsilon(R_0+1)} \mathbb{P}_x(S_b \in D_\epsilon(R_0); T > b) .$$

Considérons un nombre réel $R \geq R_0$ et un point $x \in D_\epsilon(R+1)$, et posons

$$p_x(R) = \mathbb{P}_x(S_b \in D_\epsilon(R); T > b) .$$

Cette quantité est croissante en R car les ensembles $D_\epsilon(R)$ le sont.

Si $x \in D_\epsilon(R_0+1)$, alors on a $p_x(R_0) \geq \gamma$ par définition de γ , donc aussi $p_x(R) \geq \gamma$.

Si $x \notin D_\epsilon(R_0+1)$, alors on a $R_0+1 < \langle x, \vec{u} \rangle \leq R+1$ et l'on pose

$$y = \epsilon \vec{u} + \left(\frac{R_0+1-\epsilon}{\langle x, \vec{u} \rangle - \epsilon} \right) (x - \epsilon \vec{u}) .$$

Le point y vérifie les relations suivantes :

$$- y \in D_\epsilon(R_0+1) ;$$

- $y + S_b \in D_\epsilon(R_0)$ implique $x + S_b \in D_\epsilon(R)$;
- $y + S_k \in C$ implique $x + S_k \in C$.

Par conséquent, on a aussi $p_x(R) \geq p_y(R_0) \geq \gamma$. Cela démontre le lemme. \square

Démonstration du théorème 6.1. Fixons les nombres $b \geq 1$, $R_0 > \epsilon > 0$ donnés par le lemme 6.6 précédent et posons

$$\beta = \inf_{R \geq R_0} \inf_{x \in D_\epsilon(R+1)} \mathbb{P}_x(S_b \in D_\epsilon(R); T_C > b) > 0.$$

Soit $K \subset C_\delta$ un compact. Nous allons d'abord démontrer que

$$(6.10) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{x \in K} \mathbb{P}_x(S_n \in D_\epsilon(R_0); T > n)^{1/\sqrt{n}} \geq \alpha\beta,$$

puis nous conclurons en comparant $D_\epsilon(R_0)$ avec les boules usuelles. Posons

$$p_n(R) = \inf_{x \in K} \mathbb{P}_x(S_n \in D_\epsilon(R); T > n).$$

D'après le lemme 6.6, on peut forcer la marche se trouvant dans $D_\epsilon(R+1)$ à l'instant n à retourner dans $D_\epsilon(R)$ à l'instant $n+b$ sans jamais quitter le cône C . En effet, on a

$$\{S_{n+b} \in D_\epsilon(R); T_C > n+b\} \supset \{S_n \in D_\epsilon(R+1); T_C > n\} \cap \{S_{n+b} \in D_\epsilon(R); S_{n+1}, \dots, S_{n+b} \in C\},$$

donc

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_x(S_{n+b} \in D_\epsilon(R); T_C > n+b) \\ & \geq \mathbb{P}_x(S_n \in D_\epsilon(R+1); T_C > n) \times \inf_{y \in D_\epsilon(R+1)} \mathbb{P}_y(S_b \in D_\epsilon(R); T_C > b) \end{aligned}$$

d'après la propriété de Markov. Par définition de β , cela donne

$$p_{n+b}(R) \geq p_n(R+1)\beta$$

quel que soit $R \geq R_0$, et cette propriété s'étend par récurrence en

$$(6.11) \quad p_n(R_0+k) \leq p_{n+kb}(R_0)\beta^{-k}$$

quel que soit $k \geq 1$. Grâce à cela, nous allons pouvoir comparer $p_n(R_0)$ avec $p_n(\sqrt{n})$ dont le comportement est connu (cf. proposition 6.5). Vu la croissance de $p_n(\cdot)$ et la relation (6.11), pour tout $n \geq R_0^2$ on a l'encadrement

$$p_n(\sqrt{n}) \leq p_n(R_0 + [\sqrt{n} - R_0 + 1]) \leq \beta^{-l_n} p_{k_n}(R_0),$$

où l'on a posé $l_n = [\sqrt{n} - R_0 + 1]$ et $k_n = n + l_n b$. En prenant la puissance $k_n^{-1/2}$ des membres extrêmes de cette inégalité, il vient

$$\beta^{l_n k_n^{-1/2}} p_n(\sqrt{n}) k_n^{-1/2} \leq p_{k_n}(R_0) k_n^{-1/2}.$$

Puisque $l_n \sim \sqrt{n}$ et $k_n \sim n$, un passage à la limite dans l'inégalité précédente utilisant la proposition 6.5 donne

$$(6.12) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} p_{k_n}(R_0) k_n^{-1/2} \geq \alpha\beta.$$

Les lacunes de la suite $(k_n)_{n \geq R_0^2}$ sont de taille $b-1$ et les intervalles d'entiers successifs qui composent l'image de cette suite ont une longueur qui croît indéfiniment ; tout entier suffisamment grand qui n'appartient à l'image de la suite $(k_n)_{n \geq R_0^2}$ est donc de la forme $k'_n = k_n + b$. Or d'après (6.11) on a

$$p_{k'_n}(R_0) \geq p_{k_n}(R_0 + 1)\beta \geq p_{k_n}(R_0)\beta ,$$

donc la relation (6.12) est encore vraie si l'on remplace k_n par k'_n . Puisque l'on observe le même comportement asymptotique le long des deux sous-suites « complémentaires » (k_n) et (k'_n) , on a aussi

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} p_n(R_0)^{n^{-1/2}} \geq \alpha\beta .$$

Cela démontre (6.10). □

6.5 À propos des constantes du théorème

Les lemmes 6.3 et 6.6 démontrent l'existence de constantes δ et R_0 vérifiant certaines équations qui sont ensuite utilisées pour démontrer le résultat du théorème 6.1. Si l'on distingue ces résultats d'existence de leur utilisation, on peut formuler le théorème suivant.

Théorème 6.7. *Si $\delta \geq 0$ est tel qu'il existe un entier $a \geq 1$ vérifiant*

$$(6.13) \quad \mathbb{P}_0(S_a \in C^o; S_1, \dots, S_a \in C_{-\delta}) > 0 ,$$

et si R_0 est tel qu'il existe un entier $b \geq 1$ vérifiant

$$\inf_{R \geq R_0} \inf_{\|x\| \leq R+1} \mathbb{P}_x(\|S_b\| \leq R; T_C > b) > 0 ;$$

alors, pour tout compact $K \subset C_\delta$, on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{x \in K} \mathbb{P}_x(\|S_n\| \leq R_0; T_C > n)^{1/\sqrt{n}} > 0 .$$

Les lemmes 6.3 et 6.6 montrent que de tels δ et R_0 existent et l'on retrouve alors le théorème 6.1. Malgré l'aspect un peu brut du théorème 6.7, il est utile de voir la conclusion énoncée sous ces hypothèses pour aborder la question suivante : quelles sont les constantes δ et R_0 optimales ?

Il est agréable de constater que dans le cas naturel d'une marche issue de 0 qui peut entrer immédiatement dans C^o , un cône de sécurité n'est pas nécessaire : la relation (6.13) est vraie avec $\delta = 0$ et $a = 0$.

6.6 Application au cas décentré

Cette courte section est consacrée à la démonstration du corollaire 6.2. On suppose que la mesure de probabilité \mathcal{L} est décentrée et possède tous les moments exponentiels. Soit $\rho_{\mathcal{L}}$ le minimum de la transformée de Laplace de \mathcal{L} et soit $p \in \mathbb{R}^d$ le point où ce minimum est atteint. On note $\mathcal{L}^*(dy) = \rho_{\mathcal{L}}^{-1} e^{\langle p, y \rangle} \mathcal{L}(dy)$ la mesure relativisée de \mathcal{L} , et (S_n^*) une marche aléatoire de loi \mathcal{L}^* . D'après le corollaire 5.2, on a

$$\mathbb{P}_x(\|S_n\| \leq R_0; T_C > n) = \rho_{\mathcal{L}}^n e^{\langle p, x \rangle} \mathbb{E}_x(e^{-\langle p, S_n^* \rangle}; \|S_n^*\| \leq R_0; S_1^*, \dots, S_n^* \in C) .$$

D'après le théorème 6.1, il existe R_0 et δ tels que pour tout $x \in C_\delta$ on ait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_x(\|S_n^*\| \leq R_0; S_1^*, \dots, S_n^* \in C)^{1/n} = 1 .$$

Comme

$$e^{-\|p\|R_0} \leq \frac{\mathbb{E}_x(e^{-\langle p, S_n^* \rangle}; \|S_n^*\| \leq R_0; S_1^*, \dots, S_n^* \in C)}{\mathbb{P}_x(\|S_n^*\| \leq R_0; S_1^*, \dots, S_n^* \in C)} \leq e^{\|p\|R_0},$$

on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x(e^{-\langle p, S_n^* \rangle}; \|S_n^*\| \leq R_0; S_1^*, \dots, S_n^* \in C)^{1/n} = 1,$$

puis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_x(\|S_n\| \leq R_0; T_C > n)^{1/n} = \rho_{\mathcal{L}}.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Deuxième partie

Théorèmes limites pour des processus aléatoires conditionnées à rester dans des cônes

Chapitre 7

Mouvement brownien conditionné à rester dans un cône pendant une unité de temps

Résumé. À la fin des années soixante-dix, le *méandre brownien* est apparu comme limite dans plusieurs théorèmes de convergence en loi de processus conditionnés. Dans un article datant de 1977, R. Durrett, D. Iglehart et D. Miller [10] démontrent que le mouvement brownien réel issu d'un point $x > 0$ et conditionné à rester positif pendant une unité de temps converge vers le méandre brownien lorsque x tend vers 0. En 1985, M. Shimura [28] obtient un résultat analogue pour le mouvement brownien planaire conditionné à rester dans un cône : il démontre la convergence en loi de ce processus issu d'un point x intérieur au cône lorsque x tend vers le sommet du cône, et donne l'expression des probabilités de transition du processus limite. Le résultat principal de ce chapitre est le théorème 7.42 qui étend le résultat de M. Shimura au mouvement brownien de dimension quelconque conditionné à rester dans un cône de révolution.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante :

Dans la première section, nous posons le problème de la convergence du mouvement brownien conditionné dans un cadre très général. Étant donné un ouvert U de \mathbb{R}^d , un point x de U et un temps $t \geq 0$, on note $\widetilde{W}_{x,t}^U$ la loi du *mouvement brownien issu de x et conditionné à rester dans U jusqu'à l'instant t* qui est obtenue à partir de la loi W_x du mouvement brownien issu de x en la conditionnant par l'événement $\{\tau_U > t\}$, où τ_U désigne le temps de sortie de U . La famille de lois $\{\widetilde{W}_{x,t}^U : x \in U, t \geq 0\}$ est un « processus de Markov inhomogène » (propositions 7.2 et 7.3) dont les transitions sont explicitement liées à celles du mouvement brownien tué à sa sortie de U (paragraphe 7.1.2). Sous une hypothèse très générale de *co-régularité* de U , on démontre que l'application $(x, t) \mapsto \widetilde{W}_{x,t}^U$ est continue¹ sur $U \times \mathbb{R}^+$ (théorème 7.7). Si x_0 est un point de ∂U , on a $W_{x_0}(\tau_U > 0) = 0$ et l'on ne peut pas définir de loi $\widetilde{W}_{x_0,t}^U$ de manière élémentaire : la notion de mouvement brownien issu de x_0 et conditionné à rester dans U n'a pas alors de sens *a priori*. Une façon détournée de définir un tel processus consiste à obtenir sa loi comme limite des lois $\widetilde{W}_{x,t}^U$ lorsque $x \in U$ tend vers x_0 . Il s'agit donc de savoir si l'application définie plus haut se prolonge par continuité en des points du bord de U .

Dans la section 7.2, nous étudions le cas où $U = D$ est un demi-espace. Nous rappelons d'abord en détail la méthode utilisée par R. Durrett, D. Iglehart et D. Miller pour traiter le cas du mouvement brownien réel conditionné à rester positif. Leur résultat s'étend immédiatement

1. La continuité s'entend au sens de la convergence en loi sur \mathcal{C}_∞ . Tout cela sera bien sûr précisé par la suite.

en dimension supérieure au cas d'un demi-espace puisqu'il s'agit essentiellement de conditionner l'une des coordonnées à rester positive en laissant les autres libres ; on obtient alors une famille $\{\widetilde{W}_{x,t}^D : x \in \overline{D}, t \geq 0\}$ qui est continue en le couple $(x, t) \in \overline{D} \times \mathbb{R}^+$ (théorème 7.20). On cherche alors à tirer profit de l'existence de cette famille continue pour étudier certains ouverts U dont le bord est suffisamment lisse. Pour un ouvert U contenu dans un demi-espace D , on a l'identité $\widetilde{W}_{x,t}^U = \widetilde{W}_{x,t}^D(*|\tau_U > t)$ quels que soient $x \in U$ et $t \geq 0$. Si le bord de D est un hyperplan tangent à U en un point $x_0 \in \partial U$, cette identité suggère d'étudier la positivité de $\widetilde{W}_{x_0,t}^D(\tau_U > t)$, c'est-à-dire l'irrégularité de x_0 pour U^c relativement au méandre brownien de dimension d , pour envisager une définition élémentaire de $\widetilde{W}_{x_0,t}^U$ comme la mesure de probabilité $\widetilde{W}_{x_0,t}^D$ conditionnée par l'événement $\{\tau_U > t\}$. Dans les cas où cette définition a un sens, nous donnons une condition suffisante de continuité en x_0 de la famille $\{\widetilde{W}_{x,t}^U : x \in U \cup \{x_0\}, t > 0\}^2$ (proposition 7.23). Comme l'ont fait avant nous K. Burdzy [6] dans un contexte différent et M. Shimura [27] en dimension 2, nous exploitons la dualité entre l'irrégularité relativement au méandre brownien de dimension d et l'irrégularité relativement au mouvement brownien de dimension $d + 2$ afin d'obtenir un critère permettant de décider si $\widetilde{W}_{x_0,t}^D(\tau_U > 0) = 0$ ou 1, pour une certaine classe d'ouverts U . Nous illustrons ces résultats en démontrant que la famille $\{\widetilde{W}_{x,t}^{\mathbb{B}} : x \in \mathbb{B}, t > 0\}$, où \mathbb{B} est une boule ouverte, se prolonge par continuité en tout $x \in \overline{\mathbb{B}}$ (proposition 7.32). À notre connaissance, ce résultat est nouveau.

La dernière section est consacrée à l'étude du cas où $U = C$ est un cône de révolution de sommet 0. Nous démontrons la convergence des lois $\widetilde{W}_{x,t}^C$ lorsque $x \in C$ tend vers 0 et donnons l'expression des probabilités de transition limites ; ces dernières s'obtiennent à partir de celles du mouvement brownien tué à sa sortie de C qui sont données par R. Bañuelos et R. Smits [1]. Pour démontrer le théorème 7.42, il suffit alors d'établir la tension de la suite $(\widetilde{W}_{x_n,t_n}^C)$ lorsque $x_n \in C$ tend vers 0 et $t_n > 0$ tend vers $t > 0$. Cela est fait en s'inspirant de la méthode générale appliquée par M. Shimura en dimension 2 : si la famille de lois $\{\widetilde{W}_{x,t}^C : x \in C, t \geq 0\}$ se prolonge par continuité en tout point de $\partial C \setminus \{0\}$, alors la suite $(\widetilde{W}_{x_n,t_n}^C)$ est tendue lorsque $x_n \in C$ tend vers 0. En dimension 2, un cône est localement un demi-espace en tout point de son bord autre que le sommet, et le prolongement par continuité que nous venons d'invoquer s'obtient sans difficulté. En dimension $d > 2$, pour un cône de révolution C , nous obtenons le prolongement par continuité à $\partial C \setminus \{0\}$ à l'aide des méthodes que nous avons développées dans la section précédente.

Notations et conventions Soit $\mathcal{X} = (X, \tau)$ un espace topologique. Une *mesure de probabilité sur \mathcal{X}* est une mesure de probabilité définie sur la tribu borélienne de \mathcal{X} .

Nous emploierons le terme « convergence », seul, pour désigner la notion habituelle de convergence étroite ou convergence en loi. Autrement dit, si $\{\mu, (\mu_n)_{n \geq 0}\}$ est une famille de mesures de probabilité sur \mathcal{X} , nous dirons que la suite (μ_n) converge vers μ , et nous écrirons $\mu_n \Rightarrow \mu$ ou $\lim \mu_n = \mu$, si $\lim \mu_n(f) = \mu(f)$ pour toute fonction $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée. Soit A une partie d'un espace métrique, x_0 un point adhérent à A et $\{\mu_{x_0}, (\mu_x)_{x \in A}\}$ une famille de mesures de probabilité sur \mathcal{X} . Nous dirons que μ_x converge vers μ_{x_0} lorsque $x \in A$ tend vers x_0 , et nous écrirons

$$\lim_{x \in A \rightarrow x_0} \mu_x = \mu_{x_0} ,$$

si $\lim \mu_{x_n} = \mu_{x_0}$ pour toute suite $(x_n) \in A$ convergeant vers x_0 . Cela est équivalent au fait que

$$\lim_{x \in A \rightarrow x_0} \mu_x(f) = \mu_{x_0}(f)$$

2. La famille est restreinte aux $t > 0$ car la loi $\widetilde{W}_{x_0,0}^D$ est égale à W_{x_0} si bien que $\widetilde{W}_{x_0,0}^D(\tau_U > 0)$ est toujours nul et la loi $\widetilde{W}_{x_0,0}^U$ ne peut pas être définie de cette manière.

pour toute fonction $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée. Lorsque x_0 appartient à A , nous dirons de manière plus concise que la famille $(\mu_x)_{x \in A}$ est continue en x_0 ; lorsque x_0 n'appartient pas à A , nous dirons que la famille $(\mu_x)_{x \in A}$ se prolonge par continuité en x_0 .

Soit $d \geq 1$ un entier. Pour tout $T > 0$, on désigne par C_T l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[0, T]$ à valeurs dans \mathbb{R}^d et on note $\|\cdot\|_T$ la norme uniforme définie pour tout $w \in C_T$ par $\|w\|_T = \sup_{t \in [0, T]} \|w(t)\|$. On note \mathcal{C}_T l'espace vectoriel normé $(C_T, \|\cdot\|_T)$; il est complet et séparable. On rappelle que sa tribu borélienne, \mathcal{F}_T , est engendrée par les rectangles fini-dimensionnels

$$\{w \in C_T : w(t_1) \in B_1, \dots, w(t_n) \in B_n\},$$

où $0 \leq t_1 < \dots < t_n \leq T$ et $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

On désigne par C_∞ l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[0, +\infty[$ à valeurs dans \mathbb{R}^d , et on note \mathcal{C}_∞ l'espace topologique (C_∞, τ) , où τ est la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Cet espace est métrisable à l'aide, par exemple, de la distance d définie par

$$d(w, w') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min(1, \|w - w'\|_n)}{2^n}.$$

Comme \mathcal{C}_T , l'espace \mathcal{C}_∞ est séparable et complet. Sa tribu borélienne, \mathcal{F}_∞ , est engendrée par les rectangles fini-dimensionnels

$$\{w \in C_\infty : w(t_1) \in B_1, \dots, w(t_n) \in B_n\},$$

où $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ et $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

La projection naturelle $\Pi_T : C_\infty \rightarrow C_T$, qui associe à un élément w de C_∞ sa restriction $w|_{[0, T]}$ à l'intervalle $[0, T]$, est une application continue. Si μ est une mesure de probabilité sur \mathcal{C}_∞ , on note $\mu \circ \Pi_T^{-1}$ la mesure de probabilité image de μ par Π_T . On rappelle que la convergence de mesures de probabilités sur \mathcal{C}_∞ est équivalente à la convergence de toutes les mesures images : si μ_n, μ sont des mesures de probabilités sur \mathcal{C}_∞ , alors

$$\mu_n \Rightarrow \mu \Leftrightarrow \forall T > 0, \quad \mu_n \circ \Pi_T^{-1} \Rightarrow \mu \circ \Pi_T^{-1}.$$

Lorsque nous aurons à considérer les mesures images, nous omettrons généralement la projection Π_T , et nous dirons improprement que μ_n converge vers μ sur \mathcal{C}_T si $\mu_n \circ \Pi_T^{-1} \Rightarrow \mu \circ \Pi_T^{-1}$.

Sur \mathcal{C}_∞ , nous définissons les applications coordonnées X_t , parfois notées $X(t)$, par

$$\forall w \in C_\infty, \forall t \geq 0, \quad X_t(w) = w(t).$$

On note $X = (X_t)_{t \geq 0}$ l'application identité de \mathcal{C}_∞ . Pour tout $T \geq 0$, la sous-tribu $\Pi_T^{-1} \mathcal{F}_T$ de \mathcal{F}_∞ coïncide avec la tribu $\sigma\{X_t, t \leq T\}$; on la notera simplement \mathcal{F}_T .

7.1 Mouvement brownien conditionné

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^d et $\tau_U : C_\infty \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ le temps de sortie de U , défini pour tout $w \in C_\infty$ par

$$\tau_U(w) = \inf\{t > 0 : w(t) \notin U\}.$$

Fixons un temps $t > 0$. Par continuité des trajectoires, l'ensemble $\{\tau_U > t\}$ s'écrit aussi $\{X_s \in U, \forall s \in]0, t]\}$. Observons que pour tout fermé F et tout $0 \leq a < t$, l'ensemble $\{X_s \in F, \forall s \in [a, t]\}$ est égal à

$$\bigcap_{n \geq 1} \{X(a + k2^{-n}(t-a)) \in F, \forall k = 0 \dots 2^n\},$$

donc mesurable. Maintenant, si U_ϵ désigne le fermé $\{x \in U : d(x, U^c) \geq \epsilon\}$, on peut écrire

$$\{X_s \in U, \forall s \in]0, t]\} = \bigcap_{a>0} \bigcup_{\epsilon>0} \{X_s \in U_\epsilon, \forall s \in [a, t]\},$$

et l'on en déduit que $\{\tau_U > t\}$ est mesurable, et plus précisément $\{\tau_U > t\} \in \mathcal{F}_t$. La fonction τ_U est donc un temps d'arrêt. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on note W_x la loi sur \mathcal{C}_∞ du mouvement brownien issu de x . Comme le mouvement brownien reste au voisinage de son point de départ jusqu'à l'instant t avec une probabilité positive, on a $W_x(\tau_U > t) > 0$ pour tout $x \in U$ et l'on définit une famille $\{\widetilde{W}_{x,t}^U, x \in U\}$ de lois conditionnelles sur \mathcal{C}_∞ en posant

$$(7.1) \quad \forall A \in \mathcal{F}, \quad \widetilde{W}_{x,t}^U(A) = W_x(A | \tau_U > t) = \frac{W_x(A; \tau_U > t)}{W_x(\tau_U > t)}.$$

La mesure de probabilité $\widetilde{W}_{x,t}^U$ est la loi du *mouvement brownien issu de x et conditionné à rester dans U jusqu'à l'instant t* .

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction de ce chapitre, notre but est d'étudier la convergence des lois $\widetilde{W}_{x,t}^U$ lorsque $x \in U$ tend vers un point x_0 du bord de U . Pour cette étude, nous considérerons comme dégénéré le cas où la définition (7.1) a un sens en x_0 . Afin d'éviter cette situation, nous supposons toujours que $W_{x_0}(\tau_U > 0)$ est nul pour tous les points x_0 du bord de U .

Donnons maintenant quelques définitions.

Le temps de sortie τ_B d'un borélien B de \mathbb{R}^d est défini, comme pour un ouvert, par

$$\tau_B = \inf\{t > 0 : X_t \notin B\}.$$

Nous avons vu que τ_B est une application mesurable lorsque B est un ouvert ; c'est aussi le cas lorsque B est un fermé ou une réunion dénombrable de fermés. Pour simplifier, nous supposons que B est soit ouvert, soit fermé. Un point x est dit *régulier* pour B si le mouvement brownien issu de x visite immédiatement B , c'est-à-dire :

$$W_x(\tau_{B^c} > 0) = 0.$$

Dans le cas contraire, qui correspond à $W_x(\tau_{B^c} > 0) = 1$ d'après la loi du 0-1 de Blumenthal, le point x est dit *irrégulier* pour B ; le mouvement brownien issu de x passe alors du temps dans B^c avant d'atteindre éventuellement B . Par continuité des trajectoires, tout point de B° est régulier pour B , tandis que tout point du complémentaire \overline{B}^c de \overline{B} est irrégulier pour B . La question de la régularité pour B ne concerne donc que les points de son bord. On dit que B est régulier si tous les points de ∂B sont réguliers pour B . À ces définitions classiques, nous ajoutons les deux suivantes : nous dirons de B qu'il est *co-régulier* si \overline{B}^c est régulier (c'est-à-dire que le mouvement brownien issu du bord de B sort immédiatement de \overline{B}) et qu'il est *birégulier* s'il est à la fois régulier et co-régulier. Il existe de nombreux critères de régularité pour le mouvement brownien. Le plus simple et le plus connu d'entre eux est certainement le *critère du cône* qui stipule que si B contient un cône ouvert tronqué de sommet x , alors x est régulier pour B (c.f. proposition 7.26). Ce critère assure par exemple qu'une boule, une sphère ou un cône sont biréguliers.

Lemme 7.1. *Si B est co-régulier, alors $W_x(\tau_B = \tau_{\overline{B}}) = 1$ quel que soit $x \in \mathbb{R}^d$.*

Démonstration. Pour tout $x \notin B^\circ$, on a toujours $\widetilde{W}_x(\tau_{\overline{B}} = 0) = 1$: si x n'est pas dans \overline{B} , cela est simplement dû à la continuité des trajectoires, et si x est au bord de B , c'est la définition de co-régulier. Comme τ_B est toujours plus petit que $\tau_{\overline{B}}$, on a nécessairement $W_x(\tau_B = \tau_{\overline{B}}) = 1$.

Supposons maintenant que x soit à l'intérieur de B . Sous W_x , le temps de sortie τ_B est positif, et s'il est fini, alors X_{τ_B} se trouve au bord de B . D'après la propriété de Markov forte du mouvement brownien, on a

$$W_x(\tau_B < \infty; \tau_B < \tau_{\bar{B}}) = W_x(\tau_B < \infty; W_{X_{\tau_B}}(\tau_{\bar{B}} > 0)),$$

et comme $W_y(\tau_{\bar{B}} > 0)$ est nul pour tout $y \in \partial B$, on obtient

$$W_x(\tau_B < \infty; \tau_B < \tau_{\bar{B}}) = 0.$$

□

7.1.1 Propriété de Markov

Par convention, pour tout $t \leq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, nous posons $\widetilde{W}_{x,t}^U = W_x$.

Proposition 7.2 (Propriété de Markov). *Soient $x \in U$ et $t \geq 0$. Pour tout temps $s \geq 0$, tout $A \in \mathcal{F}_{s+}$ et tout $B \in \mathcal{F}_\infty$, on a*

$$\widetilde{W}_{x,t}^U(A; \theta_s^{-1}B) = \widetilde{W}_{x,t}^U(A; \widetilde{W}_{X(s),t-s}^U(B)).$$

Démonstration. Supposons d'abord que $s \in [0, t]$. D'après la propriété de Markov du mouvement brownien, on a

$$\begin{aligned} W_x(A; \theta_s^{-1}B; \tau_U > t) &= W_x(A; \tau_U > s; W_{X(s)}(B; \tau_U > t - s)) \\ &= W_x(A; \tau_U > s; \widetilde{W}_{X(s),t-s}^U(B)W_{X(s)}(\tau_U > t - s)) \end{aligned}$$

D'autre part, la variable $\widetilde{W}_{X(s),t-s}^U(B)$ est \mathcal{F}_s -mesurable, et la propriété de Markov donne aussi

$$W_x(A; \widetilde{W}_{X(s),t-s}^U(B); \tau_U > t) = W_x(A; \widetilde{W}_{X(s),t-s}^U(B); \tau_U > s; W_{X(s)}(\tau_U > t - s)).$$

À l'ordre des termes près, le membre de droite de cette égalité est identique au membre de droite de l'égalité précédente; donc

$$W_x(A; \theta_s^{-1}B; \tau_U > t) = W_x(A; \widetilde{W}_{X(s),t-s}^U(B); \tau_U > t),$$

et le résultat annoncé s'en déduit en divisant chacun des membres par $W_x(\tau_U > t)$.

Supposons maintenant que $s \geq t$. L'événement $\{\tau_U > t\}$ est alors \mathcal{F}_s -mesurable et la propriété de Markov du mouvement brownien donne

$$W_x(A; \theta_s^{-1}B; \tau_U > t) = W_x(A; W_{X(s)}(B); \tau_U > t).$$

Vu notre convention, c'est exactement le résultat annoncé.

□

Proposition 7.3 (Propriété de Markov forte). *Soient $x \in U$ et $t > 0$. Pour tout temps optionnel τ , tout $A \in \mathcal{F}_{\tau+}$ et toute fonction $f(s, w) : \mathbb{R}^+ \times C(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable positive ou bornée, on a*

$$\widetilde{W}_{x,t}^U(A; \tau < t; f(\tau, \theta_\tau)) = \widetilde{W}_{x,t}^U(A; \tau < t; \widetilde{W}_{X(\tau),t-\tau}^U(f(s, \cdot))|_{s=\tau}).$$

Démonstration. La relation découle de la propriété de Markov forte du mouvement brownien :

$$\begin{aligned}
& W_x(A \cap \{\tau < t\} \cap \{\tau_U > t\}; f(\tau, \theta_\tau)) \\
&= W_x(A \cap \{\tau < t\} \cap \{\tau_U > \tau\} \cap \{\tau_U \circ \theta_\tau > t - \tau\}; f(\tau, \theta_\tau)) \\
&= W_x(A \cap \{\tau < t\} \cap \{\tau_U > \tau\}; W_{X(\tau)}(f(s, w); \tau_U > t - s)|_{s=\tau}) \\
&= W_x(A \cap \{\tau < t\} \cap \{\tau_U > \tau\}; W_{X(\tau)}(\tau_U > t - s)|_{s=\tau} \widetilde{W}_{X(\tau), t-\tau}^U(f(s, w))|_{s=\tau}) \\
&= W_x(A \cap \{\tau < t\} \cap \{\tau_U > t\}; \widetilde{W}_{X(\tau), t-\tau}^U(f(s, w))|_{s=\tau}) .
\end{aligned}$$

□

7.1.2 Probabilités de transition

Nous allons commencer par déterminer les lois marginales 1-dimensionnelles des mesures $\widetilde{W}_{x,t}^U$. Notons $p(s, x, y)$ les probabilités de transition du mouvement brownien :

$$p(s, x, y) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^d} e^{-\frac{\|y-x\|^2}{2t}} .$$

On rappelle que les mesures $W_x(X_s \in dy; \tau_U > s)$ possèdent des densités (pas de probabilité) $p^U(s, x, y)$ par rapport à la mesure de Lebesgue; ces densités sont les transitions du mouvement brownien tué à la sortie de U .

Pour $t < 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$, la mesure $\widetilde{W}_{x,t}^U$ est par convention égale à W_x ; pour tout $s \geq 0$, on a donc

$$\widetilde{W}_{x,t}^U(X_s \in dy) = p(s, x, y) dy .$$

Pour $t \geq 0$ et $x \in U$, nous allons distinguer deux cas :

– si $s \leq t$, alors toute fonction mesurable bornée f vérifie la relation

$$\begin{aligned}
W_x(f(X_s); \tau_U > t) &= W_x(f(X_s); \tau_U > s; W_{X_s}(\tau_U > t - s)) \\
&= \int f(y) p^U(s, x, y) W_y(\tau_U > t - s) dy .
\end{aligned}$$

Cela montre que

$$\widetilde{W}_{x,t}^U(X_s \in dy) = W_x(\tau_U > t)^{-1} p^U(s, x, y) W_y(\tau_U > t - s) dy .$$

– si $s > t$, alors toute fonction mesurable bornée f vérifie la relation

$$\begin{aligned}
W_x(f(X_s); \tau_U > t) &= W_x(\tau_U > t; W_{X_t}(f(X_{s-t}))) \\
&= \int p^U(t, x, z) W_z(f(X_{s-t})) dz \\
&= \int p^U(t, x, z) \left\{ \int f(y) p(s-t, z, y) dy \right\} dz .
\end{aligned}$$

On voit donc que

$$\widetilde{W}_{x,t}^U(X_s \in dy) = W_x(\tau_U > t)^{-1} \int p^U(t, x, z) p(s-t, z, y) dz dy .$$

Ces calculs montrent que dans tous ces cas la mesure de probabilité $\widetilde{W}_{x,t}^U(X_s \in dy)$ possède une densité $g(t, x; s, \cdot)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour faciliter les références ultérieures, nous rassemblons les résultats précédents :

$$(7.2) \quad g(t, x; s, y) = \begin{cases} p(s, x, y) & \text{si } t < 0, x \in \mathbb{R}^d \\ W_x(\tau_U > t)^{-1} p^U(s, x, y) W_y(\tau_U > t - s) & \text{si } 0 \leq s \leq t, x \in U \\ W_x(\tau_U > t)^{-1} \int p^U(t, x, z) p(s - t, z, y) dz & \text{si } 0 \leq t < s, x \in U \end{cases}$$

Rappelons maintenant quelques définitions. Une mesure de probabilité \mathbb{P} sur \mathcal{C}_∞ est un *processus de Markov* si, pour tout $s \geq 0$ et tout $B \in \mathcal{F}_\infty$, elle vérifie la relation

$$\mathbb{P}(\theta_s^{-1} B | \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(\theta_s^{-1} B | X_s) .$$

Un tel processus est entièrement déterminé par sa loi initiale $\mathbb{P}(X_0 \in *)$ et ses lois de transition

$$P(s, x; t, dy) = \mathbb{P}(X_t \in dy | X_s = x) \quad x \in \mathbb{R}^d, 0 \leq s < t .$$

Si ces lois de transition admettent toutes des densités $p(s, x; t, \cdot)$ par rapport à la mesure de Lebesgue, ces dernières vérifient l'équation de Kolmogorov inhomogène :

$$p(s, x; t, y) = \int p(s, x; u, z) p(u, z; t, y) dz \quad (x, y \in \mathbb{R}^d, 0 \leq s < u < t).$$

Les lois fini-dimensionnelles du processus \mathbb{P} sont alors données par la formule

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{t_1} \in dx_1, X_{t_2} \in dx_2, \dots, X_{t_n} \in dx_n | X_0 = x_0) \\ &= p(0, x_0; t_1, x_1) p(t_1, x_1; t_2, x_2) \dots p(t_{n-1}, x_{n-1}; t_n, x_n) dx_n \dots dx_2 dx_1 , \end{aligned}$$

pour tous $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Une telle famille de densités de probabilité $\{p(s, x; t, \cdot) : x \in \mathbb{R}^d, 0 \leq s < t\}$ est appelée famille de probabilités de transition du processus \mathbb{P} .

Fixons $x \in U$ et $t \geq 0$. La proposition 7.2 montre que pour tout $s \geq 0$ et tout $B \in \mathcal{F}_\infty$ on a

$$(7.3) \quad \widetilde{W}_{x,t}^U(\theta_s^{-1} B | \mathcal{F}_s) = \widetilde{W}_{X(s), t-s}^U(B) \quad \widetilde{W}_{x,t}^U\text{-P.s. ;}$$

autrement dit, le processus $\widetilde{W}_{x,t}^U$ est un processus de Markov. Calculons ses lois de transition. Puisque, sous $\widetilde{W}_{x,t}^U$, le processus $\{X(s), s \geq 0\}$ reste dans U jusqu'à l'instant t , il nous suffit de déterminer les lois $\widetilde{W}_{x,t}^U(X_u \in * | X_s = z)$ pour $z \in U$ lorsque $s \leq t$ et pour $z \in \mathbb{R}^d$ lorsque $s > t$. D'après l'équation (7.3), on a

$$(7.4) \quad \widetilde{W}_{x,t}^U(X_u \in dy | X_s = z) = \widetilde{W}_{z, t-s}^U(X_{u-s} \in dy) ;$$

donc

$$\widetilde{W}_{x,t}^U(X_u \in dy | X_s = z) = \widetilde{p}_t^U(s, z; u, y) dy ,$$

où l'on a posé

$$\widetilde{p}_t^U(s, z; u, y) = g(t - s, z; u - s, y) .$$

Ces résultats démontrent le théorème suivant :

Théorème 7.4. *Pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in U$, le processus $\widetilde{W}_{x,t}^U$ est un processus de Markov issu de x dont les lois de transitions possèdent les densités $\widetilde{p}_t^U(s, z; u, \cdot)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Les lois marginales sont données par la formule*

$$(7.5) \quad \begin{aligned} & \widetilde{W}_{x,t}^U(X_{t_1} \in dx_1, X_{t_2} \in dx_2, \dots, X_{t_n} \in dx_n) \\ &= \widetilde{p}_t^U(0, x; t_1, x_1) \widetilde{p}_t^U(t_1, x_1; t_2, x_2) \dots \widetilde{p}_t^U(t_{n-1}, x_{n-1}; t_n, x_n) dx_n \dots dx_2 dx_1, \end{aligned}$$

pour tous $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$.

En ce qui concerne la question principale de ce chapitre, à savoir la convergence des lois $\widetilde{W}_{x,t}^U$ lorsque x tend vers un point x_0 du bord de U , le théorème précédent montre que la convergence des lois fini-dimensionnelles tient uniquement à la convergence de la première transition $\widetilde{p}_t^U(0, x; u, \cdot)$ lorsque x tend vers x_0 . Pour donner une forme précise et rigoureuse à cette intuition, nous avons besoin des résultats de continuité présentés dans la section suivante.

7.1.3 Continuité à l'intérieur

Lemme 7.5. *Soient un point x d'un ouvert U de \mathbb{R}^d et un temps $t \geq 0$. Pour tout $w \in \{X_0 = x; \tau_U = \tau_{\overline{U}} \neq t\}$, toute suite $(w_n) \in C_\infty$ convergeant vers w et toute suite $(t_n) \in \mathbb{R}^+$ convergeant vers t , on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{\{\tau_U > t_n\}}(w_n) = \mathbb{1}_{\{\tau_U > t\}}(w).$$

Démonstration. Posons $\Omega = \{X_0 = x; \tau_U = \tau_{\overline{U}} \neq t\}$. Soient w un élément de Ω , $(w_n) \in C_\infty$ une suite convergeant vers w et $(t_n) \in \mathbb{R}^+$ une suite convergeant vers t .

On suppose d'abord que $w \in \{\tau_U > t\}$ (ce qui est le seul cas possible quand t est nul). Par continuité, on peut choisir un $\epsilon > 0$ tel que $w(s) \in U$ pour tout $s \in [0, t + \epsilon]$.

Posons

$$\eta = \frac{1}{2} \min_{s \in [0, t + \epsilon]} d(w(s), \overline{U}^c) > 0.$$

Dès que n est suffisamment grand pour qu'à la fois $\|w_n - w\|_{t+\epsilon} < \eta$ et $t_n \leq t + \epsilon$, on a $w_n(s) \in U$ pour tout $s \in [0, t_n]$, donc $\tau_U(w_n) > t_n$. On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{\{\tau_U > t_n\}}(w_n) = 1 = \mathbb{1}_{\{\tau_U > t\}}(w).$$

Supposons maintenant $t > 0$ et $w \notin \{\tau_U > t\}$. Par définition de Ω , on a nécessairement $\tau_{\overline{U}}(w) < t$; autrement dit, il existe un temps $s < t$ tel que $w(s)$ n'appartienne pas à \overline{U} . Pour tout n assez grand, on a à la fois $w_n(s) \notin \overline{U}$ et $t_n \geq s$, donc $\tau_U(w_n) \leq t_n$. Il s'ensuit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{\{\tau_U > t_n\}}(w_n) = 0 = \mathbb{1}_{\{\tau_U > t\}}(w).$$

□

Lemme 7.6. *Soit $U \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert co-régulier. Soient $x \in U$ et $t \geq 0$. Pour W_x -presque tout w , toute suite $(w_n) \in C_\infty$ convergeant vers w et toute suite $(t_n) \in \mathbb{R}^+$ convergeant vers t , on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{\{\tau_U > t_n\}}(w_n) = \mathbb{1}_{\{\tau_U > t\}}(w).$$

Démonstration. D'après le lemme 7.5, il suffit de démontrer que l'événement $\Omega = \{X_0 = x; \tau_U = \tau_{\overline{U}} \neq t\}$ a une W_x -mesure pleine. Nous savons déjà que $W_x(\tau_U = \tau_{\overline{U}}) = 1$. Par ailleurs, pour un temps $t > 0$, il est connu que $W_x(\tau_U = t)$ est toujours nul. C'est aussi vrai lorsque $t = 0$ parce que, par continuité, les trajectoires issues de x ne peuvent pas quitter l'ouvert U immédiatement. □

Théorème 7.7. Soit $U \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert co-régulier. Pour toute fonction $f : \mathcal{C}_\infty \rightarrow \mathbb{R}$, continue et bornée, l'application $(x, t) \mapsto \widetilde{W}_{x,t}^U(f)$ est continue sur $U \times [0, +\infty[$.

Démonstration. Soient un point $x \in U$, un temps $t \geq 0$ et une fonction $f : \mathcal{C}_\infty \rightarrow \mathbb{R}$, continue et bornée. Considérons des suites $(x_n) \in U$ et $(t_n) \in \mathbb{R}^+$ telles que $\lim x_n = x$ et $\lim t_n = t$, et posons

$$\phi_n(w) = f(x_n - x + w) \mathbb{1}_{\{\tau_U > t_n\}}(x_n - x + w)$$

et

$$\phi(w) = f(w) \mathbb{1}_{\{\tau_U > t\}}(w).$$

D'après le lemme 7.6, la suite de fonctions (ϕ_n) converge W_x -presque sûrement vers ϕ . Par convergence dominée, il s'ensuit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_x(\phi_n) = W_x(\phi),$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_{x_n}(f; \tau_U > t_n) = W_x(f; \tau_U > t).$$

En appliquant cette relation à la fonction constante égale à 1, il vient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_{x_n}(\tau_U > t_n) = W_x(\tau_U > t).$$

Comme $W_x(\tau_U > t)$ est positif, on en déduit que

$$\widetilde{W}_{x_n, t_n}^U(f) = \frac{W_{x_n}(f; \tau_U > t_n)}{W_{x_n}(\tau_U > t_n)} \rightarrow \frac{W_x(f; \tau_U > t)}{W_x(\tau_U > t)} = \widetilde{W}_{x,t}^U(f).$$

□

7.1.4 Prolongement au bord

Prolongement à temps fixé

Soient un point x_0 du bord de U et un temps $t > 0$. Nous dirons que la famille $\{\widetilde{W}_{x,t}^U : x \in U\}$ se prolonge par continuité en x_0 s'il existe une loi $\widetilde{W}_{x_0,t}^U$ sur \mathcal{C}_∞ telle que

$$\widetilde{W}_{x,t}^U \Rightarrow \widetilde{W}_{x_0,t}^U \quad \text{quand } x \in U \rightarrow x_0.$$

Nous dirons que le prolongement est propre (ou que la famille se prolonge proprement) en x_0 si le processus limite ne quitte pas U avant l'instant t , c'est-à-dire que $\widetilde{W}_{x_0,t}^U(\tau_U > t) = 1$. Comme le montre le théorème suivant, cette condition est en fait équivalente à la condition que $\widetilde{W}_{x_0,t}^U(X_s \in \partial U) = 0$ quel que soit $0 < s \leq t$. Lorsque le prolongement est propre, le processus limite hérite de la propriété de Markov des processus $\widetilde{W}_{x,t}^U$, $x \in U$:

Théorème 7.8. Soient $t > 0$ et $x_0 \in \partial U$. On suppose que $(\widetilde{W}_{x,t}^U)$ converge vers une loi $\widetilde{W}_{x_0,t}^U$ lorsque $x \in U$ tend vers x_0 .

Si $\widetilde{W}_{x_0,t}^U(X_s \in \partial U) = 0$ quel que soit $0 < s \leq t$, alors $\widetilde{W}_{x_0,t}^U$ est un processus de Markov issu de x_0 qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\widetilde{W}_{x_0,t}^U(\tau_U > t) = 1$;
2. pour tout $s > 0$, tout $A \in \mathcal{F}_{s+}$ et tout $B \in \mathcal{F}_\infty$,

$$(7.6) \quad \widetilde{W}_{x_0,t}^U(A; \theta_s^{-1} B) = \widetilde{W}_{x_0,t}^U(A; \widetilde{W}_{X_s, t-s}^U(B)).$$

Démonstration. Pour tout $0 < s \leq t$, la loi marginale $\widetilde{W}_{x,t}^U(X_s \in dy)$ converge vers $\widetilde{W}_{x_0,t}^U(X_s \in dy)$ lorsque $x \in U$ tend vers x_0 et le théorème de Portemanteau donne donc

$$\widetilde{W}_{x_0,t}^U(X_s \in \bar{U}) \geq \limsup_{x \rightarrow x_0} \widetilde{W}_{x,t}^U(X_s \in U) = 1.$$

Comme $\widetilde{W}_{x_0,t}^U(X_s \in \partial U) = 0$, on a nécessairement $\widetilde{W}_{x_0,t}^U(X_s \in U) = 1$. Notons que cela suffit à donner un sens à la relation (7.6) pour des $s \leq t$ puisque les lois $\widetilde{W}_{x,t-s}^U$ sont définies pour tout $x \in U$. Nous allons justement commencer par démontrer cette relation, puis nous en déduisons le point 1.

Soit $s \geq 0$. Considérons des temps $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n$, une fonction continue et bornée $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et posons $G = g(X_{s_1}, X_{s_2}, \dots, X_{s_n})$. Fixons ensuite un $\epsilon \in]0, s_1[$, des temps $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq s + \epsilon$ et une fonction F de la forme $F = f(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m})$ avec $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée. Pour tout $x \in U$, on a

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{x,t}^U(F; G \circ \theta_s) &= \widetilde{W}_{x,t}^U(F; g(X_{s+s_1}, \dots, X_{s+s_n})) \\ &= \widetilde{W}_{x,t}^U\left(F; \widetilde{W}_{X(s+\epsilon), t-s-\epsilon}^U(g(X_{s_1-\epsilon}, \dots, X_{s_n-\epsilon}))\right) \\ &= \widetilde{W}_{x,t}^U(F; H_\epsilon(X_{s+\epsilon})). \end{aligned}$$

avec $H_\epsilon(y) = \widetilde{W}_{y, t-s-\epsilon}^U(g(X_{s_1-\epsilon}, \dots, X_{s_n-\epsilon}))$. Lorsque $s + \epsilon \geq t$, la fonction H_ϵ est définie sur tout \mathbb{R}^d par la formule $H_\epsilon(y) = W_y(g(X_{s_1-\epsilon}, \dots, X_{s_n-\epsilon}))$; elle est donc continue sur \mathbb{R}^d et, par suite, la fonction $H_\epsilon(X_{s+\epsilon})$ est continue sur \mathcal{C}_∞ . Lorsque $s + \epsilon < t$, la fonction H_ϵ n'est définie que sur l'ouvert U ; elle y est continue d'après le théorème 7.7. Puisque la projection $X_{s+\epsilon}$ est continue sur \mathcal{C}_∞ et que son image est $\widetilde{W}_{x_0,t}^U$ -presque sûrement contenue dans U , on en déduit que la fonction $H_\epsilon(X_{s+\epsilon})$ est $\widetilde{W}_{x_0,t}^U$ -presque sûrement continue sur \mathcal{C}_∞ . Un temps $T > s + \epsilon$ étant fixé, nous pouvons donc appliquer le TTC sur \mathcal{C}_T pour obtenir

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \widetilde{W}_{x,t}^U(F; H_\epsilon(X_{s+\epsilon})) = \widetilde{W}_{x_0,t}^U(F; H_\epsilon(X_{s+\epsilon})).$$

Comme, par ailleurs, on a évidemment

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \widetilde{W}_{x,t}^U(F; G \circ \theta_s) = \widetilde{W}_{x_0,t}^U(F; G \circ \theta_s),$$

on en déduit que

$$(7.7) \quad \widetilde{W}_{x_0,t}^U(F; G \circ \theta_s) = \widetilde{W}_{x_0,t}^U(F; H_\epsilon(X_{s+\epsilon})).$$

Par densité, la relation précédente est vraie pour tout $F \in \mathcal{F}_{s+\epsilon}$, donc *a fortiori* pour tout $F \in \mathcal{F}_{s+}$. Fixons maintenant $F \in \mathcal{F}_{s+}$. La relation (7.7) est alors vraie pour tout $\epsilon > 0$, donc nous pouvons y faire tendre ϵ vers 0. Distinguons à nouveau deux cas. Si $s \geq t$, alors

$$H_\epsilon(X_{s+\epsilon}) = W_{X(s+\epsilon)}(g(X_{s_1-\epsilon}, \dots, X_{s_n-\epsilon})).$$

Pour toute fonction $w \in \mathcal{C}_\infty$, la mesure $W_{w(s+\epsilon)}$ converge vers $W_{w(s)}$ quand ϵ tend vers 0; donc

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} W_{w(s+\epsilon)}(g(X_{s_1-\epsilon}, \dots, X_{s_n-\epsilon})) = W_{w(s)}(g(X_{s_1}, \dots, X_{s_n})).$$

Autrement dit, la fonction $H_\epsilon(X_{s+\epsilon})$ converge simplement vers $H_0(X_s)$ quand ϵ tend vers 0. Supposons maintenant que l'on ait $s < t$. D'après le théorème 7.7, pour toute fonction $w \in \mathcal{C}_\infty$ telle que $w(s) \in U$, la mesure $\widetilde{W}_{w(s+\epsilon), t-s-\epsilon}^U$ converge vers $\widetilde{W}_{w(s), t-s}^U$ sur \mathcal{C}_∞ . On a donc

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \widetilde{W}_{w(s+\epsilon), t-s-\epsilon}^U(g(X_{s_1-\epsilon}, \dots, X_{s_n-\epsilon})) = \widetilde{W}_{w(s), t-s}^U(g(X_{s_1}, \dots, X_{s_n})).$$

Comme les fonctions w telles que $w(s) \in U$ forment par hypothèse un ensemble de $\widetilde{W}_{x_0,t}^U$ -mesure pleine, on en déduit que la fonction $H_\epsilon(X_{s+\epsilon})$ converge $\widetilde{W}_{x_0,t}^U$ -presque sûrement vers $H_0(X_s)$ quand ϵ tend vers 0. Dans les deux cas examinés, le théorème de convergence dominée s'applique donc et donne

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \widetilde{W}_{x_0,t}^U(F; H_\epsilon(X_{s+\epsilon})) = \widetilde{W}_{x_0,t}^U(F; H_0(X_s)) .$$

Cela démontre que

$$\widetilde{W}_{x_0,t}^U(F; G \circ \theta_s) = \widetilde{W}_{x_0,t}^U(F; H_0(X_s)) = \widetilde{W}_{x_0,t}^U(F; \widetilde{W}_{X_s, t-s}^U(G)) .$$

Par « densité », le résultat se prolonge à tout $G \in \mathcal{F}$ et le point 2 est démontré. Le processus $\widetilde{W}_{x_0,t}^U$ est donc un processus de Markov ; le fait qu'il soit issu de x_0 est clair puisque $\widetilde{W}_{x_0,t}^U(f(X_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \widetilde{W}_{x,t}^U(f(X_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ pour toute fonction f continue et bornée.

Il nous reste à démontrer le point 1 selon lequel $\widetilde{W}_{x_0,t}^U(\tau_U > t) = 1$. D'après la propriété de Markov que nous venons d'établir, pour tout $0 < \epsilon < t$, on a

$$\widetilde{W}_{x_0,t}^U(\forall s \in]\epsilon, t], X_s \in U) = \widetilde{W}_{x_0,t}^U\left(\widetilde{W}_{X_{\epsilon, t-\epsilon}}^U(\tau_U > t - \epsilon)\right) = 1 .$$

Le résultat s'en déduit en faisant tendre ϵ vers 0. □

Grâce à la propriété de Markov, on peut établir facilement des propriétés intéressantes du prolongement $\widetilde{W}_{x_0,t}^U$. En voici une liste, non exhaustive, mais très utile :

Proposition 7.9. *Soient $x_0 \in \partial U$ et $t > 0$. On suppose que la famille $\{\widetilde{W}_{x,t}^U : x \in U\}$ se prolonge proprement en x_0 . Si V est un autre ouvert de \mathbb{R}^d , alors :*

1. pour tout $s > 0$, $\widetilde{W}_{x_0,t}^U(\tau_V = s) = 0$;
2. si V est co-régulier, alors $\widetilde{W}_{x_0,t}^U(0 < \tau_V < \tau_{\overline{V}}) = 0$;
3. si $x_0 \in V$ et $s > 0$, alors $\widetilde{W}_{x_0,t}^U(\tau_V > s) > 0$.

Démonstration. 1. Fixons $\epsilon \in]0, \min(s, t)[$. D'après la propriété de Markov, on a

$$\widetilde{W}_{x_0,t}^U(\tau_V = s) = \widetilde{W}_{x_0,t}^U\left(\widetilde{W}_{X_{\epsilon, t-\epsilon}}^U(\tau_V = s - \epsilon)\right) .$$

Or, pour tout $x \in U$,

$$\widetilde{W}_{x,t-\epsilon}^U(\tau_V = s - \epsilon) = \frac{W_x(\tau_V = s - \epsilon; \tau_U > t - \epsilon)}{W_x(\tau_U > t - \epsilon)} = 0 ,$$

car $W_x(\tau_V = s - \epsilon) = 0$. D'où le résultat.

2. Pour tout $\epsilon \in]0, t[$, on a

$$\widetilde{W}_{x_0,t}^U(\epsilon < \tau_V < \tau_{\overline{V}}) = \widetilde{W}_{x_0,t}^U\left(\epsilon < \tau_V; \widetilde{W}_{X_{\epsilon, t-\epsilon}}^U(0 < \tau_V < \tau_{\overline{V}})\right) .$$

Or, pour tout $x \in U$,

$$\widetilde{W}_{x,t-\epsilon}^U(0 < \tau_V < \tau_{\overline{V}}) = \frac{W_x(0 < \tau_V < \tau_{\overline{V}}; \tau_U > t - \epsilon)}{W_x(\tau_U > t - \epsilon)} = 0 ,$$

car $W_x(0 < \tau_V < \tau_{\overline{V}}) = 0$ (lemme 7.1). On en déduit que

$$\widetilde{W}_{x_0,t}^U(\epsilon < \tau_V < \tau_{\overline{V}}) = 0 ,$$

et le résultat s'ensuit en faisant tendre ϵ vers 0.

3. Si x_0 est un point de V , alors toute trajectoire $w \in \mathcal{C}_\infty$ issue de x_0 a un temps de sortie $\tau_V(w) > 0$. Comme $\widetilde{W}_{x_0,t}^U(X_0 = x_0) = 1$, on a donc $\widetilde{W}_{x_0,t}^U(\tau_V > 0) = 1$. Un temps $s > 0$ étant fixé, choisissons un $\epsilon \in]0, \min(s, t)[$ tel que $\widetilde{W}_{x_0,t}^U(\tau_V > \epsilon) > 0$. D'après la propriété de Markov, on a

$$\widetilde{W}_{x_0,t}^U(\tau_V > s) = \widetilde{W}_{x_0,t}^U\left(\tau_V > \epsilon; \widetilde{W}_{X_{\epsilon,t-\epsilon}}^U(\tau_V > s - \epsilon)\right).$$

Or, pour tout $x \in U \cap V$,

$$\widetilde{W}_{x,t-\epsilon}^U(\tau_V > s - \epsilon) = \frac{W_x(\tau_V > s - \epsilon; \tau_U > t - \epsilon)}{W_x(\tau_U > t - \epsilon)} > 0.$$

□

Conditions suffisantes de convergence des lois fini-dimensionnelles

Proposition 7.10. *Soient $x_0 \in \partial U$ et $t > 0$. Pour que les lois fini-dimensionnelles de $\widetilde{W}_{x,t}^U$ convergent en loi lorsque $x \in U$ tend vers x_0 , il suffit que pour tout $0 < s \leq t$ la mesure $\widetilde{W}_{x,t}^U(X_s \in dy)$ converge vers une mesure qui ne charge pas le bord de U quand $x \in U$ tend vers x_0 .*

Démonstration. Pour tout $0 < s \leq t$, on note μ_s la limite de $\widetilde{W}_{x,t}^U(X_s \in dy)$ lorsque x tend vers x_0 . D'après le théorème de Portemanteau, on a

$$\mu_s(\overline{U}) \geq \limsup_{x \rightarrow x_0} \widetilde{W}_{x,t}^U(X_s \in U) = 1.$$

Comme $\mu_s(\partial U) = 0$, on en déduit que $\mu_s(U) = 1$.

Considérons des temps $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée, et posons $F = f(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$. Si $0 < s < \min(t_1, t)$ est fixé, alors pour tout $x \in U$ on a

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{x,t}^U(F) &= \widetilde{W}_{x,t}^U\left(\widetilde{W}_{X_s,t-s}^U(f(X_{t_1-s}, X_{t_2-s}, \dots, X_{t_n-s}))\right) \\ &= \widetilde{W}_{x,t}^U(H_s(X_s)); \end{aligned}$$

avec $H_s(y) = \widetilde{W}_{y,t-s}^U(f(X_{t_1-s}, X_{t_2-s}, \dots, X_{t_n-s}))$. Comme la mesure de probabilité $\widetilde{W}_{x,t}^U(X_s \in dy)$ converge vers μ_s lorsque $x \in U$ tend vers x_0 , et que la fonction H_s est continue sur U (d'après le théorème 7.7) qui est un ensemble de μ_s -mesure pleine, le TTC donne

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \widetilde{W}_{x,t}^U(H_s(X_s)) = \mu_s(H_s).$$

Soit encore

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \widetilde{W}_{x,t}^U(F) = \int \widetilde{W}_{y,t-s}^U(f(X_{t_1-s}, X_{t_2-s}, \dots, X_{t_n-s})) \mu_s(dy).$$

L'expression de gauche définit une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^n et la proposition est démontrée. □

Corollaire 7.11. *Soient $x_0 \in \partial U$ et $t > 0$. On suppose que le bord de U est négligeable pour la mesure de Lebesgue. Pour que les lois fini-dimensionnelles de $\widetilde{W}_{x,t}^U$ convergent en loi lorsque $x \in U$ tend vers x_0 , il suffit que pour tout $0 < s \leq t$ la densité de probabilité $\widetilde{p}_t^U(0, x; s, \cdot)$ converge simplement vers une densité de probabilité lorsque $x \in U$ tend vers x_0 .*

Démonstration. On rappelle que $\widetilde{p}_t^U(0, x; s, y)$ est la densité de probabilité de la loi $\widetilde{W}_{x,t}^U(X_s \in dy)$. Notons $f_s(y)$ la limite simple de $\widetilde{p}_t^U(0, x; s, y)$ lorsque $x \in U$ tend vers x_0 . Par hypothèse, la fonction f_s est une densité de probabilité, et le théorème de Scheffé implique donc que les mesures $\widetilde{W}_{x,t}^U(X_s \in dy)$ convergent vers la mesure de probabilité $\mu_s(dy) = f_s(y) dy$ lorsque $x \in U$ tend vers x_0 . Comme $\mu_s(\partial U) = 0$, les hypothèses de la proposition 7.10 sont satisfaites et le résultat s'ensuit. □

Prolongement à temps variable

Soient x_0 un point du bord de U et $t_0 \geq 0$. Nous dirons que la famille $\{\widetilde{W}_{x,t}^U : x \in U, t \geq 0\}$ se prolonge par continuité en (x_0, t_0) s'il existe une loi $\widetilde{W}_{x_0, t_0}^U$ sur \mathcal{C}_∞ telle que

$$\widetilde{W}_{x,t}^U \Rightarrow \widetilde{W}_{x_0, t_0}^U \quad \text{quand } (x, t) \in U \times \mathbb{R}^+ \rightarrow (x_0, t_0).$$

Cette notion est *a priori* plus forte que la notion de prolongement à temps fixé, mais la différence ne se fait essentiellement sentir que dans le cas où $t_0 = 0$.

Dans le paragraphe consacré au prolongement à temps fixé t , si nous n'avons pas parlé du cas $t = 0$, c'est parce qu'il ne présente pas d'intérêt : pour tout $x \in U$, la loi $\widetilde{W}_{x,0}^U$ est égale à W_x et converge évidemment vers W_{x_0} quand x tend vers x_0 . En revanche, la question du prolongement en $(x_0, 0)$ de $\widetilde{W}_{x,t}^U$ (comme « fonction » de deux variables) est beaucoup plus intéressante, et même un peu mystérieuse. Si $\widetilde{W}_{x,t}^U$ converge vers une limite $\widetilde{W}_{x_0,0}^U$ lorsque $(x, t) \in U \times \mathbb{R}^+$ tend vers $(x_0, 0)$, cette limite est nécessairement égale à W_{x_0} puisque, comme nous venons de le souligner,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \widetilde{W}_{x,0}^U = \lim_{x \rightarrow x_0} W_x = W_{x_0}.$$

La limite étant imposée par la définition, nous la clarifions en la reformulant de la façon suivante : on dira que la famille $\{\widetilde{W}_{x,t}^U : x \in U, t \geq 0\}$ se prolonge par continuité en $(x_0, 0)$ si

$$\widetilde{W}_{x,t}^U \Rightarrow W_{x_0} \quad \text{quand } (x, t) \in U \times \mathbb{R}^+ \rightarrow (x_0, 0).$$

La condition imposée est très forte : quelles que soient les vitesses auxquelles x et t convergent respectivement vers x_0 et 0, la limite ne garde aucun souvenir du conditionnement. Nous disions plus haut que cette question du prolongement en $(x_0, 0)$ était mystérieuse parce que nous ne savons y répondre que dans un seul cas : la famille se prolonge en $(x_0, 0)$ lorsque l'ouvert U est localement un demi-espace en x_0 . Ce résultat sera démontré au corollaire 7.21.

Pour un $t_0 > 0$, la question de savoir si la famille se prolonge en (x_0, t_0) est liée, de manière beaucoup plus limpide, à la question de l'existence d'un prolongement à temps fixé. On a, en effet, le résultat suivant :

Proposition 7.12. *Soient U un ouvert co-régulier et $x_0 \in \partial U$. Si, pour un $T > 0$, la famille $\{\widetilde{W}_{x,T}^U : x \in U\}$ se prolonge proprement en x_0 , alors la famille $\{\widetilde{W}_{x,t}^U : x \in U, t \in \mathbb{R}^+\}$ se prolonge proprement en tout (x_0, t_0) avec $t_0 > T$.*

Avant de démontrer la proposition 7.12, nous avons besoin d'établir le lemme suivant qui, d'une certaine manière, complète le lemme 7.5.

Lemme 7.13. *Soit U un ouvert de \mathbb{R}^d . Soient $x \in \partial U$ et $t > 0$. Pour tout $w \in \{X_0 = x; \tau_U = \tau_{\overline{U}} \neq t\}$, tout $s \in]0, t[$, toute suite $(w_n) \in \{\tau_U > s\}$ convergeant vers w et toute suite $(t_n) \in \mathbb{R}^+$ convergeant vers t , on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{\{\tau_U > t_n\}}(w_n) = \mathbb{1}_{\{\tau_U > t\}}(w).$$

Démonstration. Soient $w \in \{X_0 = x; \tau_U = \tau_{\overline{U}} \neq t\}$, $s \in]0, t[$, et $(w_n) \in \{\tau_U > s\}$ une suite convergeant vers w .

Supposons d'abord que $w \in \{\tau_U > t\}$ et fixons un $T \in]t, \tau_U(w)[$. Puisque $w(u) \in U$ pour tout $u \in [s, T]$, on a $\epsilon = \min_{u \in [s, T]} d(w(u), \overline{U}^c) > 0$. Dès que n est suffisamment grand pour que $\|w - w_n\|_T \leq \epsilon/2$, on a aussi $w_n(u) \in U$ pour tout $u \in [s, T]$. Combiné avec l'hypothèse que ces

trajectoires w_n n'ont pas quitté U avant l'instant s , cela implique que $\tau_U(w_n) > T$. Si de plus n est suffisamment grand pour que $t_n < T$, alors $\tau_U(w_n) > t_n$.

Supposons maintenant que $w \notin \{\tau_U > t\}$. Par hypothèse, il existe alors un $u \in]0, t[$ tel que $w(u) \notin \bar{U}$. Donc, pour tout n assez grand, on a $w_n(u) \notin \bar{U}$. Si de plus n est suffisamment grand pour que $t_n \geq u$, alors $\tau_U(w_n) \leq t_n$. \square

Démonstration de la proposition 7.12. Pour tout $t > T$, les lois $\widetilde{W}_{x,t}^U$, $x \in U$, s'expriment en fonction des lois $\widetilde{W}_{x,T}^U$ par la relation

$$\widetilde{W}_{x,t}^U(*) = \frac{\widetilde{W}_{x,T}^U(*; \tau_U > t)}{\widetilde{W}_{x,T}^U(\tau_U > t)}.$$

Soit $t_0 > T$. Comme $\widetilde{W}_{x_0,T}^U(\tau_U > T) = 1$, on démontre facilement, en utilisant la propriété de Markov, que $\widetilde{W}_{x_0,T}^U(\tau_U > t_0) > 0$; si bien que pour établir la convergence de $\widetilde{W}_{x,t}^U$ quand (x, t) tend vers (x_0, t_0) , il suffit de démontrer la convergence des mesures $\widetilde{W}_{x,T}^U(*; \tau_U > t)$ vers $\widetilde{W}_{x_0,T}^U(*; \tau_U > t_0)$.

Soient une suite $(x_n) \in U$ convergeant vers x_0 , une suite $(t_n) \in \mathbb{R}^+$ convergeant vers t_0 , et une fonction $f : \mathcal{C}_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée.

Posons

$$\Omega = \{X_0 = x_0; \tau_U = \tau_{\bar{U}} \neq t_0\} \quad \text{et} \quad \Omega' = \{\tau_U > T\}.$$

D'après la proposition 7.9, on sait que $\widetilde{W}_{x_0,T}^U(\tau_U = t_0) = 0$ et $\widetilde{W}_{x_0,T}^U(0 < \tau_U < \tau_{\bar{U}}) = 0$. Puisque $\widetilde{W}_{x_0,T}^U(\tau_U = 0) = 0$, on en déduit que

$$\widetilde{W}_{x_0,T}^U(\Omega) = 1.$$

D'autre part, pour tout $n \geq 0$, on a bien sûr

$$\widetilde{W}_{x_n,T}^U(\Omega') = 1.$$

Le lemme 7.13 montre que pour tout $w \in \Omega$ et toute suite $(w_n) \in \Omega'$ convergeant vers w , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(w_n) \mathbb{1}_{\{\tau_U > t_n\}}(w_n) = f(w) \mathbb{1}_{\{\tau_U > t_0\}}(w);$$

nous pouvons donc appliquer le T.T.C. pour obtenir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{W}_{x_n,T}^U(f; \tau_U > t_n) = \widetilde{W}_{x_0,T}^U(f; \tau_U > t_0).$$

Comme cela est valable pour toute fonction f , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widetilde{W}_{x_n,T}^U(f; \tau_U > t_n)}{\widetilde{W}_{x_n,T}^U(\tau_U > t_n)} = \frac{\widetilde{W}_{x_0,T}^U(f; \tau_U > t_0)}{\widetilde{W}_{x_0,T}^U(\tau_U > t_0)};$$

soit encore

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{W}_{x_n,t_n}^U(f) = \widetilde{W}_{x_0,T}^U(f | \tau_U > t_0).$$

Cela démontre la proposition. \square

Une notion locale ?

Nous terminons cette section par une question qui nous paraît importante : l'existence d'un prolongement propre de la famille $\{\widetilde{W}_{x,t}^U : x \in U, t \geq 0\}$ en (x_0, t_0) est-elle une question locale, qui ne dépend que de l'allure de U au voisinage de x_0 ? Sous une forme précise, la question est : si U et U' sont deux ouverts co-réguliers qui coïncident au voisinage d'un point x_0 appartenant à la fois au bord de U et au bord de U' , a-t-on équivalence entre les propositions

1. la famille $\{\widetilde{W}_{x,t}^U : x \in U, t \geq 0\}$ se prolonge proprement en (x_0, t_0)
2. la famille $\{\widetilde{W}_{x,t}^{U'} : x \in U', t \geq 0\}$ se prolonge proprement en (x_0, t_0) .

Nous n'avons qu'une réponse très partielle (qui sera néanmoins bien utile) à donner à cette question : si U' est contenu dans U , alors la proposition 1 entraîne la proposition 2. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 7.14. *Soient U un ouvert co-régulier et $x_0 \in \partial U$. Soient encore V un ouvert co-régulier contenant x_0 et $U' = U \cap V$. Si, pour un $t_0 \geq 0$, la famille $\{\widetilde{W}_{x,t}^U : x \in U, t \in \mathbb{R}^+\}$ se prolonge proprement en (x_0, t_0) , alors il en va de même pour la famille $\{\widetilde{W}_{x,t}^{U'} : x \in U', t \in \mathbb{R}^+\}$.*

Démonstration. Pour tout $x \in U'$ et $t \geq 0$, on a la relation

$$(7.8) \quad \widetilde{W}_{x,t}^{U'}(*) = \frac{\widetilde{W}_{x,t}^U(*; \tau_V > t)}{\widetilde{W}_{x,t}^U(\tau_V > t)}.$$

Comme la famille $\{\widetilde{W}_{x,t}^U : x \in U, t \geq 0\}$ se prolonge proprement en (x_0, t_0) et que x_0 appartient à V , on a

$$\widetilde{W}_{x_0,t_0}^U(\tau_V > t_0) > 0.$$

(si $t_0 > 0$, c'est le point 3 de la proposition 7.9; si $t_0 = 0$, alors $\widetilde{W}_{x_0,t_0}^U = W_{x_0}$ et le résultat est évident). On définit alors une mesure de probabilité $\widetilde{W}_{x_0,t_0}^{U'}$ en posant

$$\widetilde{W}_{x_0,t_0}^{U'}(*) = \widetilde{W}_{x_0,t_0}^U(* | \tau_V > t_0).$$

Nous allons maintenant démontrer que $\widetilde{W}_{x,t}^{U'}$ converge vers cette loi $\widetilde{W}_{x_0,t_0}^{U'}$ quand $(x, t) \in U' \times \mathbb{R}^+$ tend vers (x_0, t_0) . Posons $\Omega = \{X_0 = x_0; \tau_V = \tau_{\overline{V}} \neq t_0\}$. Pour $t_0 = 0$ on a encore une fois $\widetilde{W}_{x_0,t_0}^U = W_{x_0}$, et l'on sait déjà que $W_{x_0}(\Omega) = 1$ (cf. lemme 7.6). Pour $t_0 > 0$, la proposition 7.9 montre que

$$\widetilde{W}_{x_0,t_0}^U(\tau_V = t_0) = 0 \quad \text{et} \quad \widetilde{W}_{x_0,t_0}^U(0 < \tau_V < \tau_{\overline{V}}) = 0.$$

De plus, comme x_0 appartient à l'ouvert V , on a nécessairement $\widetilde{W}_{x_0,t_0}^U(\tau_V = 0) = 0$ par continuité des trajectoires. On déduit de ces trois identités que $\widetilde{W}_{x_0,t_0}^U(\Omega) = 1$.

Soient une suite $(x_n) \in U'$ convergeant vers x_0 et une suite $(t_n) \in \mathbb{R}^+$ convergeant vers t_0 . Si $f : C_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et bornée, alors le lemme 7.5 implique que, pour tout $w \in \Omega$ et toute suite $(w_n) \in C_\infty$ convergeant vers w , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(w_n) \mathbb{1}_{\{\tau_V > t_n\}}(w_n) = f(w) \mathbb{1}_{\{\tau_V > t_0\}}(w).$$

En appliquant le T.T.C., on obtient alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{W}_{x_n,t_n}^{U'}(f; \tau_V > t_n) = \widetilde{W}_{x_0,t_0}^{U'}(f; \tau_V > t_0),$$

Compte tenu de la relation (7.8), cela démontre le théorème. □

7.2 Le cas d'un demi-espace

7.2.1 Demi-droite et méandre brownien

Quand $x > 0$ tend vers 0, le mouvement brownien issu de x et conditionné à rester positif pendant une unité de temps converge en loi vers le méandre brownien. Ce résultat apparaît dans un article de R. Durrett, D. Iglehart et R. Miller [10] dont l'objectif est de donner les lois de certaines fonctionnelles du méandre brownien et d'autres processus tels le pont brownien. Leur résultat joue un rôle crucial dans notre généralisation en dimension supérieure et nous allons consacrer cette section à la présentation de la démonstration qui en est donnée dans [10]. Dans les grandes lignes, la méthode consiste à extraire une section d'une trajectoire brownienne dont la loi est exactement la loi conditionnelle étudiée. Une méthode similaire s'applique aussi à des marches aléatoires conditionnées, comme nous le verrons dans le chapitre suivant.

Pour simplifier les notations, nous noterons τ_+ le temps de sortie de la demi-droite pointée \mathbb{R}_*^+ et $\widetilde{W}_{x,t}^+$ la loi conditionnelle $\widetilde{W}_{x,t}^{\mathbb{R}_*^+}$. Afin d'exprimer la loi $\widetilde{W}_{x,t}^+$ comme la mesure image de W par une certaine transformation $\phi_{x,t}$, nous introduisons le temps aléatoire $T_{x,t}$ défini pour tout $x \geq 0$ et tout $t \geq 0$ par

$$T_{x,t} = \inf\{s > 0 : X(s) = x \text{ et } X(u) > 0, \forall u \in]s, s+t]\}.$$

Notons dès maintenant que $T_{x,t}$ est en fait un minimum. Afin d'établir la propriété de convergence des temps $T_{x,t}$ qui est présentée au lemme 7.16, nous aurons besoin du lemme suivant qui énonce que deux zéros consécutifs du mouvement brownien ne sont jamais espacés dans le temps d'une durée fixée par avance :

Lemme 7.15. *Pour tout $t > 0$,*

$$(7.9) \quad W(\exists s \geq 0 \text{ t.q. } X(s) = X(s+t) = 0 \text{ et } X(u) > 0, \forall u \in]s, s+t]) = 0.$$

Démonstration. Fixons un $T > 0$ et, pour tout $t \in [1, 2]$, considérons les événements A_t définis par

$$A_t = \{\exists s \in [0, T] \text{ t.q. } X(s) = X(s+t) = 0 \text{ et } X(u) > 0, \forall u \in]s, s+t]\}.$$

Comme une trajectoire brownienne ne peut pas appartenir à plus de T de ces événements, seul un nombre fini d'entre eux ont une probabilité supérieure à un nombre positif fixé. Or, par changement d'échelle, tous les $A_t, t \in [1, 2]$, ont une probabilité plus grande que A_2 . Donc A_2 doit avoir une probabilité nulle. En faisant tendre T vers l'infini, on en déduit que le lemme est vrai avec $t = 2$, et le cas général s'ensuit par changement d'échelle. □

Lemme 7.16. *Pour tout $x \geq 0$ et tout $t \geq 0$, le temps aléatoire $T_{x,t}$ est presque sûrement fini. Si $(x_n) \in \mathbb{R}^+$ converge vers 0 et $(t_n) \in \mathbb{R}^+$ converge vers un $t \geq 0$, alors la suite de temps (T_{x_n, t_n}) converge presque sûrement vers $T_{0,t}$.*

Démonstration. Soit $h = \inf\{t > 0 : X(t) = 1\}$ le temps d'atteinte de 1 et soit $g = \inf\{t > h : X(t) = 0\}$ le temps de premier retour en 0 après h . Puisqu'au temps d'arrêt h la trajectoire se trouve en 1, la propriété de Markov du mouvement brownien donne

$$(7.10) \quad W(g - h > 1) = W_1(\min_{t \in [0,1]} X(t) > 0) = W(\min_{t \in [0,1]} X(t) > -1) > 0.$$

Nous construisons une suite strictement croissante $h_1 < g_1 < h_2 < g_2 < \dots$ de temps d'arrêt en posant $h_1 = h, g_1 = g$ et, pour tout $i \geq 1, h_{i+1} = g_i + h \circ \theta_{g_i}$ et $g_{i+1} = g_i + g \circ \theta_{g_i}$. Les accroissements

$(g_i - h_i)_{i \geq 1}$ sont indépendants et identiquement distribués. D'après (7.10), la série $\sum W(g_i - h_i > 1)$ diverge, et le lemme de Borel-Cantelli montre alors que $W(\{g_i - h_i > 1\} \text{ i. s.}) = 1$. En particulier, $T_{1,1}$ est presque sûrement fini. On démontrerait de même que, pour tout $x > 0$ et tout $t \geq 0$, $T_{x,t}$ est presque sûrement fini. Enfin, il en va de même pour les temps $T_{0,t}$, car $T_{0,t}$ est majoré par $T_{x,t}$ quel que soit $x \geq 0$.

Pour la seconde assertion du lemme, nous devons distinguer les cas $t = 0$ et $t > 0$. Commençons par le cas $t = 0$. Pour presque toute trajectoire brownienne w , on a $T_{0,0}(w) = \inf\{t : w(t) = 0\} = 0$. D'autre part, presque toute trajectoire brownienne atteint des valeurs > 0 dans tout voisinage de 0. Considérons une telle trajectoire w , fixons $\epsilon > 0$ et choisissons $s \in [0, \epsilon]$ tel que $w(s) > 0$. Si on note α le temps du dernier retour en 0 avant s et β le temps du premier retour en 0 après s , alors, dès que $x_n \leq w(s)$ et $t_n \leq \beta - s$, il existe un $u \in [\alpha, s]$ tel que $w(u) = x_n$ et que w soit strictement positive sur $]u, u + t_n]$. Donc $T_{x_n, t_n}(w) \leq \epsilon$. Comme ϵ est arbitraire, cela démontre que $\lim T_{x_n, t_n}(w) = 0$. Passons au cas $t > 0$. Considérons une trajectoire w appartenant au complémentaire de l'ensemble défini à l'équation (7.9) telle que les temps $(T_{x_n, t_n}(w))_n$ et $T_{0,t}(w)$ soient tous finis et notons-les respectivement $(T_n)_n$ et T . Par définition de T et continuité de w , il existe un $\eta > 0$ tel que w soit > 0 sur $]T, T + t + \eta]$. Fixons $0 < \epsilon < \eta$ et posons $\alpha = \max_{s \in [T, T + \epsilon]} w(s)$. Dès que $x_n \in [0, \alpha]$ et $t_n \leq t + \epsilon$, il existe $u \in [T, T + \epsilon]$ tel que $w(u) = x_n$ et que w soit > 0 sur $]u, u + t_n]$. Donc $T_n \leq T + \epsilon$. Comme ϵ est arbitraire, on obtient $\limsup T_n \leq T$. Pour démontrer que $\liminf T_n \geq T$, nous raisonnons par l'absurde en supposant que le contraire est vrai. Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que $\lim T_n = \gamma < T$. On a alors $w(\gamma) = \lim_n w(T_n) = \lim x_n = 0$, et $w(s) > 0$ quel que soit $s \in]\gamma, \gamma + t[$, car de tels s sont dans $[T_n, T_n + t_n]$ dès que n est suffisamment grand. Comme, par hypothèse, $\gamma + t$ ne peut pas être le lieu du zéro suivant, la fonction w est strictement positive sur $] \gamma, \gamma + t]$, donc $T \leq \gamma$. Contradiction. □

Pour tout $x \geq 0$ et tout $t \geq 0$, nous définissons une transformation $\phi_{x,t}$ de C_∞ dans lui-même en posant,

$$\forall w \in C_\infty, \forall s \geq 0, \quad \phi_{x,t}(w)(s) = w(T_{x,t}(w) + s) .$$

Lemme 7.17. *Pour tout $x > 0$ et tout $t \geq 0$, on a*

$$\widetilde{W}_{x,t}^+ = W \circ \phi_{x,t}^{-1} .$$

Démonstration. Soient $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ des nombres réels, B_1, B_2, \dots, B_n des boréliens de \mathbb{R} et $B = \{w \in C_\infty : w(t_i) \in B_i, \forall i = 1 \dots n\}$. Le temps $h_x = \inf\{s > 0 : X_s = x\}$ de première atteinte de x est un temps d'arrêt $\leq T_{x,t}$. Écrivons d'abord

$$W(\phi_{x,t} \in B) = \underbrace{W(\phi_{x,t} \in B; T_{x,1} = h_x)}_{(1)} + \underbrace{W(\phi_{x,t} \in B; T_{x,t} > h_x)}_{(2)} .$$

La quantité (1) s'écrit aussi $W(X(h_x + \cdot) \in B; X(h_x + s) > 0, \forall s \in [0, t])$ et est égale à

$$W_x(B; \tau_+ > t) ,$$

d'après la propriété de Markov forte du mouvement brownien. Traitons la quantité (2). Sur l'ensemble $\{T_{x,t} > h_x\}$ on a $T_{x,t} = h_x + T_{x,t} \circ \theta_{h_x}$ et $\phi_{x,t} = \phi_{x,t} \circ \theta_{h_x}$. La propriété de Markov forte donne alors

$$(2) = W_x(\phi_{x,t} \in B; T_{x,t} > 0) .$$

Partant de x , l'événement $\{T_{x,t} > 0\}$ signifie que $X(s)$ s'annule au moins une fois pour un $s \in [0, t]$; autrement dit $\tau_+ \leq t$. Le temps $T_{x,t}$ est alors plus grand que τ_+ et vérifie les relations $T_{x,t} =$

$\tau_+ + T_{x,t} \circ \theta_{\tau_+}$ et $\phi_{x,t} = \phi_{x,t} \circ \theta_{\tau_+}$. En utilisant à nouveau la propriété de Markov forte avec le temps d'arrêt τ_+ , on obtient

$$(2) = W_x(\tau_+ \leq t; W(\phi_{x,t} \in B)) = W_x(\tau_+ \leq t)W(\phi_{x,t} \in B) .$$

Rassemblant les expressions obtenues pour (1) et (2), il vient

$$W(\phi_{x,t} \in B) = W_x(B; \tau_+ > t) + \{1 - W_x(\tau_+ > t)\}W(\phi_{x,t} \in B) ,$$

donc

$$W(\phi_{x,t} \in B) = \frac{W_x(B; \tau_+ > t)}{W_x(\tau_+ > t)} = \widetilde{W}_{x,t}^+(B) .$$

□

Théorème 7.18. *Pour tout $t \geq 0$, la famille $\{\widetilde{W}_{x,s}^+ : x > 0, s \geq 0\}$ se prolonge proprement en $(0, t)$. La limite $\widetilde{W}_{0,t}^+$ est égale à $W \circ \phi_{0,t}^{-1}$.*

Démonstration. Soit $f : C_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Pour toute suite $(x_n) \in \mathbb{R}_*^+$ convergeant vers 0 et toute suite $(t_n) \in \mathbb{R}^+$ convergeant vers t , le lemme 7.16 montre que la suite de fonctions $(f(\phi_{x_n, t_n}))_n$ converge presque sûrement vers $f(\phi_{0,t})$. Par convergence dominée, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W \circ \phi_{x_n, t_n}^{-1}(f) = W \circ \phi_{0,t}^{-1}(f) ,$$

ce qui, en vertu du lemme 7.17, est bien le résultat annoncé. □

Pour $t = 0$, nous avons observé que $T_{0,0}$ est toujours nul, donc $\phi_{0,0}$ est l'identité de C_∞ et $\widetilde{W}_{0,0}^+$ n'est rien d'autre que la mesure de Wiener W . Pour $t > 0$, la loi $\widetilde{W}_{0,t}^+$ sera appelée loi du t -méandre brownien.

Effet d'un changement d'échelle

Soit $K_t, t > 0$, la fonction de changement d'échelle de C_∞ définie par

$$\forall w \in C_\infty, \forall s \geq 0, \quad K_t(w)(s) = \sqrt{t} w(s/t) .$$

Il est connu (et nous avons déjà utilisé le fait) que la mesure de Wiener est invariante par K_t , c'est-à-dire : $W \circ K_t^{-1} = W$. Nous allons voir à présent que les mesures $\widetilde{W}_{0,t}^+$ et $\widetilde{W}_{0,1}^+$ sont liées par un tel changement d'échelle. Pour cela, observons d'abord que les temps $T_{0,t}$ et $T_{0,1}$ entretiennent la relation $t^{-1} T_{0,t} \circ K_t = T_{0,1}$. Or, si nous calculons

$$K_t \circ \phi_{0,1}(w)(s) = \sqrt{t} \phi_{0,1}(w)(s/t) = \sqrt{t} w(T_{0,1}(w) + s/t) ,$$

et

$$\phi_{0,t} \circ K_t(w)(s) = K_t(w)(T_{0,t}(K_t(w)) + s) = \sqrt{t} w(t^{-1} T_{0,t}(K_t(w)) + s/t) ,$$

nous voyons que $K_t \circ \phi_{0,1} = \phi_{0,t} \circ K_t$. Par invariance de W par changement d'échelle, nous en déduisons

$$W \circ \phi_{0,t}^{-1} = W \circ K_t^{-1} \circ \phi_{0,1}^{-1} = W \circ \phi_{0,1}^{-1} \circ K_t^{-1} ,$$

donc

$$(7.11) \quad \widetilde{W}_{0,t}^+ = \widetilde{W}_{0,1}^+ \circ K_t^{-1} .$$

En conséquence, il suffit d'étudier le 1-méandre brownien, que nous appellerons désormais simplement *méandre brownien*, pour connaître toute la famille $\{\widetilde{W}_{0,t}^+, t > 0\}$.

Probabilités de transition du méandre brownien

Pour terminer cette section, nous allons montrer comment on peut calculer les lois de transition du méandre brownien, $\widetilde{W}_{0,1}^+(X_t \in dy | X_s = x)$, pour $0 \leq s < t \leq 1$.

D'après la propriété de Markov du méandre brownien, pour $x > 0$ et $0 < s < t \leq 1$, on sait que

$$\widetilde{W}_{0,1}^+(X_t \in dy | X_s = x) = \widetilde{W}_{x,1-s}^+(X_{t-s} \in dy) = p^+(t-s, x, y) \frac{W_y(\tau^+ > 1-t)}{W_x(\tau^+ > 1-s)},$$

où p^+ est la fonction de transition du mouvement brownien tué à la sortie de $]0, +\infty[$ (voir section 7.1.2, équation 7.2). Nous allons calculer la fonction p^+ à l'aide du principe de réflexion. Pour tout $t > 0$, on note $m(t) = \min_{s \in [0,t]} X(s)$. Par le principe de réflexion, pour tout $x > 0$ et tous $0 < u < v$, on a

$$W_x(X_t \in (u, v); m(t) \leq 0) = W_x(X_t \in (-v, -u)) = W_{-x}(X_t \in (u, v)),$$

et par suite

$$W_x(X_t \in (u, v); \tau^+ > t) = W_x(X_t \in (u, v); m(t) > 0) = W_x(X_t \in (u, v)) - W_{-x}(X_t \in (u, v)).$$

On en déduit que

$$W_x(X_t \in dy; \tau^+ > t) = p^+(t, x, y) dy,$$

avec

$$p^+(t, x, y) = (2\pi t)^{-1/2} (e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} - e^{-\frac{(y+x)^2}{2t}}) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y).$$

En intégrant cette relation en y , nous obtenons aussi

$$W_x(\tau^+ > t) = 2 N_t(x),$$

où nous avons posé $N_t(x) = \int_0^x (2\pi t)^{-1/2} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy$. On a donc

$$\widetilde{W}_{0,1}^+(X_t \in dy | X_s = x) = p^+(t-s, x, y) \frac{N_{1-t}(y)}{N_{1-s}(x)} dy.$$

Il nous reste à déterminer les lois $\widetilde{W}_{0,1}^+(X_t \in dy)$. Pour $x > 0$ et $t \in]0, 1]$, on a

$$\widetilde{W}_{x,1}^+(X_t \in dy) = p^+(t, x, y) \frac{N_1(x)}{N_{1-t}(y)} dy.$$

Lorsque $x \rightarrow 0$, on a $N_1(x) \sim x(2\pi)^{-1/2}$ et $g(t, x, y) \sim x(2\pi)^{-1/2} (2t^{-3/2} y e^{-\frac{y^2}{2t}})$. D'où

$$\lim_{x \rightarrow 0} p^+(t, x, y) \frac{N_1(x)}{N_{1-t}(y)} = 2t^{-3/2} y e^{-\frac{y^2}{2t}} N_{1-t}(y).$$

On peut vérifier par le calcul que la dernière expression obtenue est bien une densité de probabilité, et il s'ensuit, par le théorème de Scheffé, que

$$\widetilde{W}_{0,1}^+(X(t) \in dy) = 2t^{-3/2} y e^{-\frac{y^2}{2t}} N_{1-t}(y) dy.$$

Théorème 7.19. *Le méandre brownien est un processus de Markov inhomogène à trajectoires continues, strictement positives sur l'intervalle $]0, 1]$ et dont les transitions $\widetilde{p}^+(s, x; t, y)$, $s, t \in [0, 1]$, $x, y \in \mathbb{R}^+$, sont données par*

$$\widetilde{p}^+(s, x; t, y) = \begin{cases} 2t^{-3/2} y e^{-\frac{y^2}{2t}} N_{1-t}(y) & \text{si } s = 0, x = 0 \text{ et } y > 0; \\ p^+(t-s, x, y) \frac{N_{1-t}(y)}{N_{1-s}(x)} & \text{si } s > 0, x, y > 0; \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

7.2.2 Demi-espace et méandre brownien en dimension supérieure

Rien ne s'oppose à la généralisation en dimension supérieure du résultat de convergence obtenu dans la section précédente, lorsqu'on remplace la demi-droite $]0, +\infty[$ par un demi-espace ouvert D . Vu les propriétés d'invariance du mouvement brownien, le problème de la convergence des lois $\widetilde{W}_{x,t}^D$ lorsque x tend vers un point x_0 du bord de D est invariant par déplacement. Afin d'éviter d'inutiles complications des notations et sans perdre en généralité, nous considérerons donc uniquement le cas où $D = \{x \in \mathbb{R}^d : x_1 > 0\}$ et $x_0 = 0$.

On obtient facilement la généralisation suivante du théorème 7.18 :

Théorème 7.20. *Pour tout $t \geq 0$, la famille $\{\widetilde{W}_{x,s}^D, x \in D, s \geq 0\}$ se prolonge proprement en $(0, t)$. La loi limite $\widetilde{W}_{0,t}^D$ est égale à la loi du processus $(\widetilde{B}^t, B(d-1))$, où \widetilde{B}^t est un t -méandre brownien et $B(d-1) \in \mathbb{R}^{d-1}$ est un mouvement brownien indépendant de \widetilde{B}^t .*

Démonstration. La généralisation est pratiquement immédiate puisque les coordonnées du mouvement brownien sont indépendantes et que le conditionnement ne porte que sur la première coordonnée. Soient $A \in \mathcal{F}^{(1)}$ et $B \in \mathcal{F}^{(d-1)}$. Puisque les coordonnées du mouvement brownien sont indépendantes et que $\tau_D(x+X) = \tau_+(x_1+X_1)$, pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in D$, on a

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{x,t}^D(A \times B) &= W(x_1 + X_1 \in A; (x_2 + X_2, \dots, x_d + X_d) \in B \mid \tau_+(x_1 + X_1) > t) \\ &= W(x_1 + X_1 \in A \mid \tau_+(x_1 + X_1) > t) \times W((x_2 + X_2, \dots, x_d + X_d) \in B) \\ (7.12) \quad &= \widetilde{W}_{x_1,t}^+(A) \times W((x_2 + X_2, \dots, x_d + X_d) \in B). \end{aligned}$$

D'autre part, la définition de $\widetilde{W}_{0,t}^D$ donne

$$(7.13) \quad \widetilde{W}_{0,t}^D(A \times B) = \widetilde{W}_{0,t}^+(A) \times W((X_2, \dots, X_d) \in B).$$

Le résultat annoncé découle alors de la proposition 7.18. □

Le théorème 7.20 est un outil précieux. Il nous permet d'obtenir un premier résultat de convergence de portée (un peu) générale :

Corollaire 7.21. *Soit $U \subset D$ un ouvert co-régulier dont le bord contient 0. Si U est localement un demi-espace en 0, alors la famille $\{\widetilde{W}_{x,s}^U, x \in U, s \geq 0\}$ se prolonge proprement en tout $(0, t)$, $t \geq 0$. Pour tout $t > 0$, la loi limite $\widetilde{W}_{0,t}^U$ est égale à $\widetilde{W}_{0,t}^D(* \mid \tau_U > t)$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 7.14. □

Pour de futurs besoins, nous introduisons une autre représentation des lois $\widetilde{W}_{x,t}^D$. Pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \overline{D}$ et $t \geq 0$, on définit le processus $Z_{x,t}$ par

$$\forall s \geq 0, \quad Z_{x,t}(s) = X(T_{x_1,t}(X_1) + s) - X(T_{x_1,t}(X_1)) + x.$$

Proposition 7.22. *Pour tout $x \in D \cup \{0\}$ et tout $t \geq 0$, on a*

$$\widetilde{W}_{x,t}^D(*) = W(Z_{x,t} \in *).$$

Démonstration. Afin d'alléger les formules, nous démontrons l'égalité pour la dimension $d = 2$. Soient A et B deux éléments de \mathcal{F} . Par définition du processus $Z_{x,t}$, en tenant compte du fait que $X_1(T_{x_1,t}(X_1)) = x_1$, on a

$$\begin{aligned} W(Z_{x,t} \in A \times B) &= W(\phi_{x_1,t}(X_1) \in A; X_2(T_{x_1,t}(X_1) + \cdot) - X_2(T_{x_1,t}(X_1)) + x_2 \in B) \\ &= W(\phi_{x_1,t}(X_1) \in A; W(X_2(T_{x_1,t}(X_1) + \cdot) - X_2(T_{x_1,t}(X_1)) + x_2 \in B \mid X_1)) . \end{aligned}$$

Par indépendance des coordonnées X_1 et X_2 , et par stationnarité des accroissements de X_2 , on a

$$W(X_2(T_{x_1,t}(X_1) + \cdot) - X_2(T_{x_1,t}(X_1)) + x_2 \in B \mid X_1) = W(X_2 + x_2 \in B) ,$$

si bien que

$$\begin{aligned} W(Z_{x,t} \in A \times B) &= W(\phi_{x_1,t}(X_1) \in A) \times W(X_2 + x_2 \in B) , \\ &= \widetilde{W}_{x_1,t}^+(A) \times W(X_2 + x_2 \in B) . \end{aligned}$$

Ce qui est suffisant, vu (7.12) et (7.13). □

7.2.3 Application à des ouverts « lisses »

Dans cette section, nous allons montrer comment on peut utiliser le résultat de convergence obtenu dans le cas d'un demi-espace pour aborder le cas d'un ouvert quelconque. Nous considérons un ouvert U dont le bord contient l'origine 0 et nous nous posons la question de la convergence des lois $\widetilde{W}_{x,t}^U$, lorsque x tend vers 0 dans U . L'idée que nous allons développer provient d'un constat d'échec. Choisissons une fonction $f : C_\infty \rightarrow \mathbb{R}$, continue et bornée, et écrivons

$$(7.14) \quad \widetilde{W}_{x,t}^U(f) = \frac{W_x(f; \tau_U > t)}{W_x(\tau_U > t)} .$$

Puisque la loi W_x converge vers W_0 , quand x tend vers 0, nous nous demandons naturellement si le numérateur et le dénominateur du membre de droite de l'équation précédente n'ont pas une limite que l'on pourrait identifier. Or, à supposer que le théorème de Portemanteau s'applique (ce qui est faux en général), nous obtiendrions la convergence de $W_x(\tau_U > t)$ vers $W_0(\tau_U > t)$, dont la valeur est nulle dans les cas les plus courants : ceux où 0 est co-régulier pour U . Une telle attaque du problème s'avère donc inutile ... à moins de trouver un moyen de rendre 0 irrégulier pour U^c ; c'est-à-dire de forcer les trajectoires issues de 0 à passer du temps dans U avant de s'échapper. Et, ne pouvant modifier la géométrie du problème, nous n'avons comme seul choix que de modifier la loi des trajectoires. Ce projet peut être réalisé utilement au moins dans un cas : celui où l'ouvert U est contenu dans le demi-espace D . En effet, comme D contient U , on a

$$(7.15) \quad \widetilde{W}_{x,t}^U(f) = \frac{W_x(f; \tau_U > t; \tau_D > t)}{W_x(\tau_U > t; \tau_D > t)} = \frac{\widetilde{W}_{x,t}^D(f; \tau_U > t)}{\widetilde{W}_{x,t}^D(\tau_U > t)} = \widetilde{W}_{x,t}^D(f \mid \tau_U > t) .$$

Nous n'avons pas beaucoup peiné mais le problème s'en trouve fondamentalement changé : nous conditionnons à rester dans U des trajectoires qui vivent déjà dans le demi-espace D . En l'origine, ce dernier constitue une barrière qui repousse les trajectoires dans la direction e_1 et nous pouvons espérer avoir $\widetilde{W}_{0,t}^D(\tau_U > t) > 0$ pour des ouverts dont le bord est suffisamment lisse au voisinage de l'origine. Cette intuition se verra confirmée par la proposition 7.29 dans laquelle nous énonçons un critère de $\widetilde{W}_{0,t}^D$ -irrégularité de 0 pour U^c découvert - semble-t-il indépendamment -

par M. Shimura ([27], Lemma 3.1) et K. Burdzy ([6], Corollary 3.1); la majeure partie de cette section est dédiée à la présentation de ce résultat qui nécessite l'introduction d'un petit arsenal mathématique.

Avant d'aborder ce point, nous nous tournons vers l'autre partie du problème qui consiste à trouver des conditions sous lesquelles le théorème de Portemanteau s'applique aux mesures $\widetilde{W}_{x,t}^D(*; \tau_U > t)$. Les résultats obtenus sont présentés à la proposition 7.23. La principale difficulté à laquelle nous devons faire face est la discontinuité du temps d'arrêt τ_U sur l'ensemble des trajectoires issues de l'origine. Cet écueil peut être contourné lorsque U est localement un demi-espace en l'origine, car la question est inchangée si l'on remplace U par un ouvert V qui coïncide avec U sur D et qui contient l'origine, de sorte que τ_V est continu. Mais, dans tous les autres cas, nous devons ajouter une hypothèse pour nous assurer que, sous $\widetilde{W}_{x,t}^D$, le temps de sortie de U ne peut pas devenir trop petit alors même que x est proche de 0. Cette hypothèse n'est pas satisfaisante, car peu souvent vérifiée, mais suffira pour traiter des exemples importants où l'ouvert U possède de bonnes propriétés d'invariance : cône de révolution ou boule, par exemple.

C'est précisément par l'étude du cas d'une boule \mathbb{B} que nous concluerons cette section, en démontrant complètement la convergence des lois $\widetilde{W}_{x,t}^{\mathbb{B}}$ lorsque x tend vers un point du bord de \mathbb{B} (théorème 7.32).

Un critère de continuité

Soit U un ouvert co-régulier contenu dans D et dont le bord contient 0. Pour tout $t > 0$, on note $\widetilde{W}_{0,t}^U$ la loi conditionnelle $\widetilde{W}_{0,t}^D(* | \tau_U > t)$ dès que cela a un sens, c'est-à-dire si $\widetilde{W}_{0,t}^D(\tau_U > t) > 0$. Le théorème de continuité des lois $\widetilde{W}_{x,t}^U$ se prolonge en 0 de la façon suivante :

Proposition 7.23. *Soient une suite $(x_n) \in U$ convergeant vers 0 et une suite $(t_n) \in [0, 1]$ convergeant vers un $t > 0$. Si $\widetilde{W}_{0,t}^D(\tau_U > 0) = 1$, alors $\widetilde{W}_{0,t}^D(\tau_U > t) > 0$. Si, de plus,*

$$(7.16) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \widetilde{W}_{x_n, t_n}^D(\tau_U \leq s) = 0 ,$$

alors la suite $(\widetilde{W}_{x_n, t_n}^U)$ converge vers $\widetilde{W}_{0,t}^U$.

Démonstration. Si $\widetilde{W}_{0,t}^D(\tau_U > 0) = 1$, alors il existe $0 < s \leq t$, tel que $\widetilde{W}_{0,t}^D(\tau_U > s) > 0$. La propriété de Markov permet d'écrire

$$\widetilde{W}_{0,t}^D(\tau_U > t) = \widetilde{W}_{0,t}^D(\tau_U > s; \widetilde{W}_{X_s, t-s}^D(\tau_U > t - s)) ,$$

et puisque, pour tout $y \in U$, on a $\widetilde{W}_{y, t-s}^D(\tau_U > t - s) > 0$, on en déduit que $\widetilde{W}_{0,t}^D(\tau_U > t) > 0$.

Considérons des suites (x_n) , (t_n) comme dans l'énoncé. Posons $\Omega = \{X_0 = 0; \tau_U = \tau_{\overline{U}} \neq t\}$. La proposition 7.9 montre que

$$\widetilde{W}_{0,t}^D(\tau_U = t) = 0 \quad \text{et} \quad \widetilde{W}_{0,t}^D(0 < \tau_U < \tau_{\overline{U}}) = 0 .$$

De plus, par hypothèse, on a $\widetilde{W}_{0,t}^D(\tau_U = 0) = 0$. On déduit de ces trois identités que $\widetilde{W}_{x_0, t_0}^U(\Omega) = 1$.

Soit $\epsilon > 0$. La relation (7.16) fait que l'on peut choisir $s_\epsilon > 0$ tel que

$$\widetilde{W}_{x_n, t_n}^D(\tau_U > s_\epsilon) \geq 1 - \epsilon$$

pour tout n assez grand. Fixons un tel s_ϵ et posons $\Omega^\epsilon = \{\tau_U > s_\epsilon\}$.

D'après le lemme 7.13, pour tout $w \in \Omega$, toute suite $(w_n) \in \Omega^\epsilon$, et toute fonction $f : \mathcal{C}_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(w_n) \mathbb{1}_{\{\tau_U > t_n\}}(w_n) = f(w) \mathbb{1}_{\{\tau_U > t\}}(w) .$$

En appliquant le TTC, on obtient alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{W}_{x_n, t_n}^D(f; \tau_U > t_n) = \widetilde{W}_{0, t}^D(f; \tau_U > t) ;$$

si bien que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widetilde{W}_{x_n, t_n}^D(f; \tau_U > t_n)}{\widetilde{W}_{x_n, t_n}^D(\tau_U > t_n)} = \frac{\widetilde{W}_{0, t}^D(f; \tau_U > t)}{\widetilde{W}_{0, t}^D(\tau_U > t)} .$$

Comme $\widetilde{W}_{x_n, t_n}^U(*) = \widetilde{W}_{x_n, t_n}^D(* | \tau_U > t_n)$, cela démontre la proposition. \square

Irrégularité de l'origine pour le méandre généralisé

Pour pouvoir utiliser la proposition 7.23 nous avons besoin d'un critère permettant de décider si $\widetilde{W}_{0, t}^D(\tau_U > t) = 1$ ou non. Pour cela, nous allons exploiter la *dualité* qui existe entre la régularité pour le D -méandre brownien de dimension d et la régularité pour le mouvement brownien de dimension $d + 2$. Cette dualité apparaît dans les travaux de M. Shimura [27] et de K. Burdzy [6].

Intervalles d'excursion Revenons pour quelque temps à la dimension $d = 1$. L'ensemble (aléatoire) $\mathcal{E}(X)$ des intervalles $]a, b[$ tels que $0 \leq a < b$, $X(a) = 0$, $X(t) > 0$ quel que soit $t \in]a, b[$ et $X(b) = 0$, est appelé *ensemble des intervalles d'excursions*. Nous noterons $d\mathcal{E}(X)$ l'ensemble des réels a qui sont la borne inférieure d'un intervalle de $\mathcal{E}(X)$. Si $a \in d\mathcal{E}$, nous noterons toujours b le temps du premier retour en 0 après a . On se souvient que la loi du méandre brownien $\widetilde{W}_{0, 1}^+$ est la loi, sous W , du processus $\{X(T + s), s \geq 0\}$, où $T = \min\{t \geq 0 : X(t) = 0 \text{ et } X(s) > 0, \forall s \in]t, t + 1]\}$. En d'autres termes, il s'agit de la première excursion de durée plus grande que 1 : on démontre facilement que $T = \min\{a \in d\mathcal{E} : b - a > 1\}$. Le méandre brownien est donc l'une des excursions du mouvement brownien et certaines de ses propriétés deviennent plus accessibles lorsqu'on travaille globalement avec l'ensemble des excursions. Le lemme suivant donne une décomposition utile de l'ensemble des intervalles d'excursion :

Lemme 7.24. *Pour tout $n \geq 1$, on note $\mathcal{E}_n(X)$ l'ensemble des intervalles d'excursion $]a, b[\in \mathcal{E}(X)$ tels que $\max_{s \in [a, b]} X(s) \geq 1/n$. On a :*

1. $\mathcal{E}(X) = \cup_{n \geq 1} \mathcal{E}_n(X)$;
2. Sous W , l'ensemble $\mathcal{E}_n(X)$ est constitué d'une suite d'intervalles successifs $]a_1^n, b_1^n[,]a_2^n, b_2^n[, \dots$, deux à deux disjoints, et la distribution de X est identique sur chacun de ces intervalles ;
3. Sous W , la distribution de X entre l'instant a_1^n et celui de première atteinte de $1/n$ est identique à la distribution d'un processus de Bessel de dimension 3 entre l'instant 0 et l'instant où il atteint $1/n$ pour la première fois.

Démonstration. 1. Clair.

2. Soient $h_{1/n} = \min\{t > 0 : X(t) = 1/n\}$ le temps d'atteinte de $1/n$, $\beta_1 = \min\{t > h_{1/n} : X(t) = 0\}$ le temps de premier retour en 0 après avoir atteint $1/n$ pour la première fois, et $\alpha_1 = \max\{t < h_{1/n} : X(t) = 0\}$ l'instant du dernier retour en 0 avant la première atteinte de $1/n$.

Ces temps sont W -p.s. finis et β_1 est un temps d'arrêt. On définit une suite croissantes d'instantanés aléatoires $\alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 < \beta_2 \leq \dots$ par

$$\forall i \geq 1, \quad \alpha_{i+1} = \beta_i + \alpha_1 \circ \theta_{\beta_i} \text{ et } \beta_{i+1} = \beta_i + \beta_1 \circ \theta_{\beta_i} .$$

Tous les intervalles $]\alpha_i, \beta_i[$ sont des intervalles d'excursion de $\mathcal{E}_n(X)$ et, entre deux de ces intervalles consécutifs, il ne se trouve aucun autre intervalle d'excursion de $\mathcal{E}_n(X)$ car le processus n'y atteint pas $1/n$. Autrement dit, $\mathcal{E}_n(X) = \{]\alpha_i, \beta_i[, i \geq 1\}$. Par la seconde assertion, nous voulons dire que, sous W , les processus $\{X(\alpha_i + s), s \geq 0\}$ ont une loi sur \mathcal{C}_∞ qui ne dépend pas de i : comme β_i est un temps d'arrêt, pour tout $A \in \mathcal{F}$, on a

$$\begin{aligned} W(X(\alpha_{i+1} + \cdot) \in A) &= W(\theta_{\alpha_{i+1}} \in A) \\ &= W(\theta_{\alpha_1} \circ \theta_{\beta_i} \in A) \\ &= W(W_{X(\beta_i)}(\theta_{\alpha_1} \in A)) \\ (X(\beta_i) = 0) &= W(\theta_{\alpha_1} \in A) \\ &= W(X(\alpha_1 + \cdot) \in A) . \end{aligned}$$

3. D'après ce qui précède, le temps a_1^n est l'instant du dernier retour du mouvement brownien en 0 avant d'atteindre $1/n$. D'après le théorème de décomposition des chemins browniens de Williams [36], le mouvement brownien pris entre ces deux instants a même loi qu'un processus de Bessel de dimension 3 pris entre les instants 0 et l'instant où il atteint $1/n$ pour la première fois. \square

Dualité méandre/mouvement brownien pour la régularité Retournons à la dimension $d \geq 2$ et considérons un ouvert $U \subset \mathbb{R}^d$. Nous voulons obtenir un critère de régularité du point 0 pour U relativement à $\widetilde{W}_{0,1}^D$, c'est-à-dire un critère sur U qui permette de décider si $\widetilde{W}_{0,1}^D(\tau_U = 0) = 0$ ou 1. (Le fait que les seules valeurs possibles soient 0 ou 1 n'a rien d'évident à ce stade de l'exposé et sera établi au cours de cette section.)

Introduisons une nouvelle notation : pour tout temps aléatoire ν , nous notons Z_ν le processus défini par

$$\forall s \geq 0, \quad Z_\nu(s) = (X_1(\nu + s), X_2(s), \dots, X_d(s)) .$$

La loi $\widetilde{W}_{0,1}^D$ est la loi du processus $Z_{T_{0,1}}$ relativement à W (où $T_{0,1}$ doit être compris comme $T_{0,1}(X_1)$), et $\widetilde{W}_{0,1}^D(\tau_U = 0) = W(\tau_U(Z_{T_{0,1}}) = 0)$.

Au lieu de considérer le processus $Z_{T_{0,1}}$ seul, il sera profitable de travailler avec toute la famille des excursions $\{Z_a, a \in d\mathcal{E}(X_1)\}$ dont $Z_{T_{0,1}}$ fait partie. Pour commencer, considérons la relation

$$(7.17) \quad W(\forall a \in d\mathcal{E}(X_1), \tau_U(Z_a) = 0) = 1 ,$$

qui implique en particulier que $W(\tau_U(Z_{T_{0,1}}) = 0) = 1$. Puisque $\mathcal{E}(X_1) = \cup_{n \geq 1} \mathcal{E}_n(X_1)$, la relation (7.17) est équivalente à

$$(7.18) \quad \forall n \geq 1, \quad W(\forall a \in d\mathcal{E}_n(X_1), \tau_U(Z_a) = 0) = 1 .$$

Or, d'après le lemme 7.24, $d\mathcal{E}_n(X_1)$ est constitué d'une suite $a_1^n < a_2^n < \dots$ et les processus $Z_{a_i^n}$ sont identiquement distribués sous W . Il s'ensuit que l'équation (7.18) est équivalente à

$$(7.19) \quad \forall n \geq 1, \quad W(\tau_U(Z_{a_1^n}) = 0) = 1 .$$

Considérons le processus $\widetilde{Z}_{a_1^n}$ obtenu à partir de $Z_{a_1^n}$ en tuant ses trajectoires lorsque leur première coordonnée atteint $1/n$ pour la première fois. Puisque l'événement $\{\tau_U = 0\}$ ne dépend que du

futur immédiat, on a $\{\tau_U(Z_{a_1^n}) = 0\} = \{\tau_U(\tilde{Z}_{a_1^n}) = 0\}$. D'autre part, d'après le point 3 du lemme et par indépendance de ses coordonnées, le processus $\tilde{Z}_{a_1^n}$ a même loi que $(\widetilde{BS}(3), B(d-1))$, où $B(d-1)$ est un mouvement brownien $d-1$ dimensionnel et $\widetilde{BS}(3)$ est le processus obtenu à partir d'un processus de Bessel de dimension 3, $BS(3)$, indépendant de $B(d-1)$, en tuant ses trajectoires lorsqu'elles atteignent $1/n$ pour la première fois. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, on a $\{\tau_U(\widetilde{BS}(3), B(d-1)) = 0\} = \{\tau_U(BS(3), B(d-1)) = 0\}$, et la relation (7.19) est équivalente à

$$(7.20) \quad W(\tau_U(\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}, X_4, \dots, X_{d+2}) = 0) = 1.$$

où W doit être interprété comme la mesure de Wiener de dimension $d+2$. Si $U^* = \{x \in \mathbb{R}^{d+2} : (\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, x_4, \dots, x_{d+2}) \in U\}$, alors l'équation précédente se récrit

$$(7.21) \quad W(\tau_{U^*} = 0) = 1.$$

On montre de la même manière que $\widetilde{W}_{0,1}^D(\tau_U > 0) = 1$ est équivalent à $W(\tau_{U^*} > 0) = 1$ et l'on obtient la proposition suivante :

Proposition 7.25. *Soient $U \in \mathbb{R}^d$ un ouvert et $U^* = \{x \in \mathbb{R}^{d+2} : (\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, x_4, \dots, x_{d+2}) \in U\}$. On a*

$$\widetilde{W}_{0,1}^D(\tau_U > 0) = W(\tau_{U^*} > 0).$$

Démonstration. Le résultat se déduit de l'analyse précédente et du fait que $W(\tau_{U^*} > 0)$ ne peut prendre que les valeurs 0 et 1 d'après la loi du 0-1 de Blumenthal. \square

La condition du cône Cette dualité est très utile puisqu'elle lie la régularité relativement au méandre brownien à la régularité relativement au mouvement brownien pour laquelle nous connaissons de nombreux critères. Le plus célèbre et le plus simple d'entre eux est la *condition du cône* qui permet d'expliquer pourquoi le méandre brownien sort immédiatement de tout cône de révolution.

Proposition 7.26. *Soit U un ouvert de \mathbb{R}^d et $y \in \partial U$. S'il existe un cône ouvert C de sommet y et $r > 0$ tels que $C \cap B(0, r) \subset U^c$, alors $W_y(\tau_U > 0) = 0$.*

Démonstration. Par invariance par translation, il suffit de démontrer la proposition pour $y = 0$. Pour tout $s > 0$, on a $W(\tau_U < s) \geq W(X(s) \in C \cap B(0, r)) = W(X(1) \in C \cap B(0, rs^{-1/2}))$, par changement d'échelle. En passant à la limite quand s tend vers 0, on obtient $W(\tau_U = 0) \geq W(X(1) \in C) > 0$. Le résultat découle alors de la loi du 0-1 de Blumenthal. \square

Corollaire 7.27. *Soit $U \subset D$ un ouvert de \mathbb{R}^d dont le bord contient 0. S'il existe un cône ouvert $C \subset \mathbb{R}^d$ de sommet 0 et $r > 0$ tel que $C \cap B(0, r) \subset D \setminus U$, alors $\widetilde{W}_{0,1}^D(\tau_U > 0) = 0$.*

Démonstration. D'après la proposition 7.25, il suffit de démontrer que $W(\tau_{U^*} > 0) = 0$. On a $0 \in \partial U^*$ et $C^* \cap B^d(0, r)^* = (C \cap B^d(0, r))^* \subset (U^c)^* = (U^*)^c$. Le résultat découle de la proposition 7.26 puisque $B^d(0, r)^* = B^{d+2}(0, r)$ et que C^* est un cône ouvert de \mathbb{R}^{d+2} . \square

Critère d'irrégularité de Kolmogorov Nous venons de voir qu'un cône C de sommet 0 est immédiatement visité par le mouvement brownien. En grande dimension, si l'on pince suffisamment le sommet du cône de manière à former une épine, alors le mouvement brownien ne visite plus immédiatement ce nouvel ensemble. Un critère précis, parfois appelé critère de l'épine de Lebesgue, est donné par la proposition suivante :

Proposition 7.28 ([25], Proposition 3.5). *Soit $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que $h(r) > h(0) = 0$ pour $r > 0$ et que la fonction $r \mapsto h(r)/r$ soit croissante pour r petit. Soit $d > 3$ et soit*

$$T_h = \{x \in \mathbb{R}^d : x_1 \geq 0 \text{ et } \sqrt{x_2^2 + \cdots + x_d^2} \leq h(x_1)\}.$$

Le point 0 est W -régulier pour T_h si et seulement si l'intégrale

$$\int_0^1 \left(\frac{h(r)}{r} \right)^{d-3} \frac{dr}{r}$$

est divergente.

On en déduit bien sûr un critère de régularité relativement au méandre brownien. Soit $d \geq 2$. Pour toute fonction continue $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ on pose $U_h = \{x \in \mathbb{R}^d : x_1 > h(\sqrt{x_2^2 + \cdots + x_d^2})\}$. Le critère suivant permet de décider si 0 est $\widetilde{W}_{0,1}^D$ -irrégulier pour U_h^c .

Proposition 7.29 ([6], Corollary 3.1.). *Si $h(r)/r$, $r > 0$, est croissante dans un voisinage de 0, alors $\widetilde{W}_{0,1}^D(\tau_{U_h} > 0) = 1$ ou 0 selon que l'intégrale $\int_0^1 h(r)r^{-2} dr$ est convergente ou divergente.*

Démonstration. On reproduit ici la démonstration que donne K. Burdzy dans [6]. D'après la proposition 7.25, il est équivalent d'étudier la W -régularité de 0 pour

$$(U_h^*)^c = \left\{ x \in \mathbb{R}^{d+2} : \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq h\left(\sqrt{x_4^2 + \cdots + x_{d+2}^2}\right) \right\}.$$

Lorsque $d = 2$, la proposition 7.28 s'applique immédiatement et montre que $W(\tau_{U_h^*} > 0) = 1$ si et seulement si l'intégrale $\int_0^1 h(r)r^{-2} dr$ est convergente. Pour traiter le cas général, nous allons d'abord supposer que la fonction h est croissante. On remarque alors que l'ensemble $(U_h^*)^c$ contient

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^{d+2} : \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq h(|x_4|) \right\}$$

et est contenu dans

$$\bigcup_{k=4}^{d+2} \left\{ x \in \mathbb{R}^{d+2} : \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq h(\sqrt{d}|x_k|) \right\}.$$

Rappelons que si $(X_1, X_2, \dots, X_{d+2})$ est un mouvement brownien, alors (X_1, X_2, X_3, X_k) est un mouvement brownien de dimension 4 quel que soit $k = 4 \dots d+2$. Si 0 est W -irrégulier pour $(U_h^*)^c$, alors il l'est aussi pour $\left\{ x \in \mathbb{R}^{d+2} : \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq h(|x_4|) \right\}$; donc d'après la proposition 7.28, l'intégrale $\int_0^1 h(r)r^{-2} dr$ est convergente. Réciproquement, si l'intégrale $\int_0^1 h(r)r^{-2} dr$ est convergente, alors 0 est W -irrégulier pour $\left\{ x \in \mathbb{R}^{d+2} : \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq h(\sqrt{d}|x_k|) \right\}$ quel que soit $k = 4 \dots d+2$. Ce qui est suffisant.

Si la fonction h n'est pas croissante sur \mathbb{R}^+ , nous savons néanmoins qu'elle l'est dans un voisinage de 0. Cela est suffisant parce que, par continuité des trajectoires, le méandre brownien ne peut pas sortir immédiatement d'une boule centrée en l'origine; donc la question de savoir si $\widetilde{W}_{0,1}^D(\tau_{U_h} > 0) = 1$ ou 0 ne dépend que de la forme de U_h au voisinage de 0. \square

Un exemple d'application : le cas d'une boule

Dans cette section, nous allons démontrer la convergence en loi du mouvement brownien conditionné à rester dans une boule pendant une unité de temps lorsque son point de départ, intérieur à la boule, tend vers le bord de la boule. Cet exemple est important pour la suite car les méthodes employées et certains résultats intermédiaires seront utilisés à nouveau lorsque nous traiterons le cas d'un cône de révolution.

Soit $d \geq 2$ un entier. On note D le demi-espace $\{x \in \mathbb{R}^d : x_1 > 0\}$ et \mathbb{B} la boule ouverte de centre $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ et de rayon 1. Elle est incluse dans D et tangente à ∂D en 0. Le test de Kolmogorov montre que $\widetilde{W}_{0,1}^D(\tau_{\mathbb{B}} > 0) = 1$; si bien que pour obtenir la convergence de $\widetilde{W}_{x_n,1}^{\mathbb{B}}$ vers $\widetilde{W}_{0,1}^D(*|\tau_{\mathbb{B}} > 1)$ lorsque $(x_n) \in \mathbb{B}$ tend vers 0, il suffirait, d'après la proposition 7.23, de vérifier que

$$(7.22) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \widetilde{W}_{x_n,1}^D(\tau_{\mathbb{B}} \leq s) = 0 .$$

Mais un examen de la situation laisse apparaître que (7.22) est fautive en général. En effet, en tout point x du bord de \mathbb{B} autre que l'origine 0, on a $\widetilde{W}_{x,1}^D(\tau_{\mathbb{B}} = 0) = 1$ et il est possible de choisir une suite $(x_n) \in \mathbb{B}$ qui, tout en convergeant vers 0, longe dangeureusement le bord de \mathbb{B} au point que $\lim_{s \rightarrow 0} \limsup_n \widetilde{W}_{x_n,1}^D(\tau_{\mathbb{B}} \leq s) = 1$. Pour éviter cet écueil, nous allons nous restreindre aux suites (x_n) de la forme $(\lambda_n e_1)$, avec $\lambda_n \rightarrow 0$, pour lesquelles nous démontrerons que (7.22) est vraie. Nous obtiendrons alors la convergence de $\widetilde{W}_{x_n,1}^{\mathbb{B}}$ pour de telles suites et nous en déduirons le résultat dans le cas général en exploitant la géométrie du problème qui fait que toute mesure $\widetilde{W}_{x,1}^{\mathbb{B}}$, $x \in \mathbb{B}$, s'exprime comme la mesure image par une rotation (de centre e_1) d'une mesure $\widetilde{W}_{\lambda e_1,1}^{\mathbb{B}}$.

Commençons par un résultat de géométrie élémentaire. Soit E l'ensemble des suites $(\epsilon_2, \dots, \epsilon_d)$ constituées de $+1$ et de -1 . Pour tout $\epsilon = (\epsilon_2, \dots, \epsilon_d) \in E$, on note $\bar{\epsilon}$ l'élément $(-\epsilon_2, \dots, -\epsilon_d)$. On définit 2^{d-1} parties disjointes de D indexées par l'ensemble E en posant

$$\forall \epsilon \in E, \quad D_\epsilon = \{x \in D : \epsilon_2 x_2, \dots, \epsilon_d x_d \geq 0\} .$$

Lemme 7.30. *Si $y \in D_\epsilon \cap \{x \in \mathbb{R}^d : x_1 = 1\}$, alors $B(y, 1) \cap \mathbb{B}^c$ ne rencontre pas $D_{\bar{\epsilon}}$.*

Démonstration. Soit x un point de $B(y, 1) \cap D_{\bar{\epsilon}}$. On a

$$1 \geq (x_1 - 1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_d - y_d)^2 = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2 + \sum_{i=2}^d (y_i^2 - 2x_i y_i) ;$$

et comme $y \in D_\epsilon$ et $x \in D_{\bar{\epsilon}}$, on a $\epsilon_i y_i \geq 0$ et $-\epsilon_i x_i \geq 0$, donc $-x_i y_i \geq 0$, et la somme $\sum_{i=2}^d (y_i^2 - 2x_i y_i)$ est positive. Il s'ensuit que x est aussi dans \mathbb{B} , donc $B(y, 1) \cap D_{\bar{\epsilon}} \subset \mathbb{B}$, et le lemme est démontré. \square

Lemme 7.31.

$$\lim_{s \rightarrow 0} \limsup_{\lambda \rightarrow 0} \widetilde{W}_{\lambda e_1,1}^D(\tau_{\mathbb{B}} \leq s) = 0 .$$

Démonstration. Nous allons d'abord démontrer que, pour tout $s > 0$, on a

$$(7.23) \quad \limsup_{\lambda \rightarrow 0} \widetilde{W}_{\lambda e_1,1}^D(\tau_{\mathbb{B}} \leq s) \leq 2^{d-1} \widetilde{W}_{0,1}^D(\tau_{\mathbb{B}} \leq s) ,$$

et le résultat se déduira alors du fait que $\widetilde{W}_{0,1}^D(\tau_{\mathbb{B}} = 0) = 0$.

Pour comparer les mesures $\widetilde{W}_{0,1}^D$ et $\widetilde{W}_{\lambda e_1,1}^D$, nous commençons par les exprimer comme les lois de deux morceaux successifs d'une même trajectoire brownienne. Posons $T_\lambda = \inf\{t \geq 0 : X_1(t) = \lambda \text{ et } X_1(s) > 0, \forall s \in]t, t+1]\}$ et introduisons le processus Z_λ défini par

$$\forall s \geq 0, \quad Z_\lambda(s) = X(T_\lambda + s) - X(T_\lambda) + \lambda e_1 .$$

On rappelle que d'après la proposition 7.22, pour tout $\lambda \geq 0$, la loi de Z_λ sous W coïncide avec $\widetilde{W}_{\lambda e_1,1}^D$. On relie d'abord le temps de sortie de la boule pour Z_λ avec le temps de sortie de cette même boule pour Z_0 :

$$(7.24) \quad W(\tau_{\mathbb{B}}(Z_\lambda) \leq s) \leq W(\tau_{\mathbb{B}}(Z_0) \leq s + T_\lambda - T_0) + W(\tau_{\mathbb{B}}(Z_0) > s + T_\lambda - T_0; \tau_{\mathbb{B}}(Z_\lambda) \leq s) .$$

Pour alléger l'écriture des formules, posons $u = \tau_{\mathbb{B}}(Z_\lambda)$. Si $\tau_{\mathbb{B}}(Z_0) > s + T_\lambda - T_0$ et $u \leq s$, alors $Z_0(u + T_\lambda - T_0) = X(T_\lambda + u) - X(T_0) \in \mathbb{B}$; ce qui s'écrit encore $Z_\lambda(u) \in B(Y_\lambda, 1)$, où l'on a posé $Y_\lambda = X(T_0) - X(T_\lambda) + (1 + \lambda)e_1 = (1, X_2(T_0) - X_2(T_\lambda), \dots, X_d(T_0) - X_d(T_\lambda))$. Comme $Z_\lambda(u) \notin \mathbb{B}$, on a $Z_\lambda(u) \notin D_{\bar{\epsilon}}$ dès que $Y_\lambda \in D_\epsilon$, d'après le lemme 7.30. Cette analyse conduit à la majoration

$$(7.25) \quad W(\tau_{\mathbb{B}}(Z_0) > s + T_\lambda - T_0; \tau_{\mathbb{B}}(Z_\lambda) \leq s) \leq \sum_{\epsilon \in E} W(Y_\lambda \in D_\epsilon; \tau_{\mathbb{B}}(Z_\lambda) \leq s; Z_\lambda(u) \notin D_{\bar{\epsilon}}) .$$

Puisque la variable Y_λ ne dépend que des valeurs des coordonnées (X_2, \dots, X_d) prises en des instants $\leq T_\lambda$ qui ne dépendent eux-mêmes que de X_1 , elle est indépendante de Z_λ conditionnellement à X_1 . De plus, on a $W(Y_\lambda \in D_\epsilon | X_1) = 1/2^{d-1}$ et l'on en déduit que

$$\begin{aligned} W(\tau_{\mathbb{B}}(Z_0) > s + T_\lambda - T_0; \tau_{\mathbb{B}}(Z_\lambda) \leq s) &\leq \frac{1}{2^{d-1}} \sum_{\epsilon \in E} W(\tau_{\mathbb{B}}(Z_\lambda) \leq s; Z_\lambda(u) \notin D_{\bar{\epsilon}}) \\ &= \frac{2^{d-1} - 1}{2^{d-1}} W(\tau_{\mathbb{B}}(Z_\lambda) \leq s) . \end{aligned}$$

En introduisant ce résultat dans l'équation (7.24), on obtient

$$(7.26) \quad W(\tau_{\mathbb{B}}(Z_\lambda) \leq s) \leq 2^{d-1} W(\tau_{\mathbb{B}}(Z_0) \leq s + T_\lambda - T_0) .$$

Le lemme découle de cette relation par passage à la limite quand λ tend vers 0, car $\lim_{\lambda \rightarrow 0} T_\lambda = T_0$ presque sûrement (cf. lemme 7.16). \square

Proposition 7.32. *Pour toute suite $(x_n) \in \mathbb{B}$ convergeant vers 0, la suite de lois $(\widetilde{W}_{x_n,1}^{\mathbb{B}})$ converge vers $\widetilde{W}_{0,1}^D(* | \tau_{\mathbb{B}} > 1)$.*

Démonstration. Nous venons de voir que les hypothèses de la proposition 7.23 sont satisfaites lorsque la suite (x_n) est de la forme $(\lambda_n e_1)$. Pour toute suite $(\lambda_n) \in [0, 2]$ convergeant vers 0, on a donc $\widetilde{W}_{\lambda_n e_1,1}^{\mathbb{B}} \rightarrow \widetilde{W}_{0,1}^D(* | \tau_{\mathbb{B}} > 1)$.

À tout point x de \mathbb{B} on associe le nombre réel $\lambda = 1 - \|x - e_1\|$. Il existe alors une rotation R_x de centre e_1 qui envoie λe_1 sur x et la mesure $\widetilde{W}_{x,1}^{\mathbb{B}}$ est la mesure image de $\widetilde{W}_{\lambda e_1,1}^{\mathbb{B}}$ par R_x . En effet, pour tout réel $t \geq 0$, on a

$$(7.27) \quad \widetilde{W}_{\lambda e_1,1}^{\mathbb{B}} \circ R_x^{-1}(X(t) \in *) = W(\tau_{\mathbb{B}}(\lambda e_1 + X) > 1)^{-1} W(R_x(\lambda e_1 + X)(t) \in *; \tau_{\mathbb{B}}(\lambda e_1 + X) > 1) .$$

Notons R_x^o la rotation vectorielle associée à R_x : elle est donnée pour tout y et z par la relation $R_x^o(y) = R_x(y + z) - R_x(z)$, si bien que $R_x(\lambda e_1 + X) = x + R_x^o(X)$. Comme $\tau_{\mathbb{B}}$ est physiquement

invariant par R_x , on a $\tau_{\mathbb{B}}(\lambda e_1 + X) = \tau_{\mathbb{B}}(R_x(\lambda e_1 + X)) = \tau_{\mathbb{B}}(x + R_x^o(X))$ et le membre de droite de l'équation (7.27) devient

$$W(\tau_{\mathbb{B}}(x + R_x^o(X)) > 1)^{-1} W(x + R_x^o(X(t)) \in *; \tau_{\mathbb{B}}(x + R_x^o(X)) > 1) .$$

Et, de l'invariance de W par rotation vectorielle, on déduit que cette expression vaut

$$W(\tau_{\mathbb{B}}(x + X) > 1)^{-1} W(x + X(t) \in *; \tau_{\mathbb{B}}(x + X) > 1) = \widetilde{W}_{x,1}^{\mathbb{B}}(X(t) \in *) .$$

La géométrie élémentaire des rotations montre que, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\|R_x(y) - y\| \leq \|y - e_1\| \frac{\|x - \lambda e_1\|}{\|x - e_1\|} .$$

Soient alors $(x_n) \in \mathbb{B}$ une suite convergeant vers 0 et (λ_n) la suite associée. Pour tout $T > 0$ et pour toute suite $(w_n) \in C_T$ convergeant uniformément vers un $w \in C_T$, on a

$$\|R_{x_n}(w_n) - w\|_T \leq \|w_n - e_1\|_T \frac{\|x_n - \lambda_n e_1\|}{\|x_n - e_1\|} + \|w_n - w\|_T \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 .$$

D'après le TTC (théorème B.1), la suite de mesures $(\widetilde{W}_{\lambda_n e_1, 1}^{\mathbb{B}} \circ R_{x_n}^{-1})$ converge donc sur C_T vers $\widetilde{W}_{0,1}^D(* | \tau_{\mathbb{B}} > 1)$ et la proposition en découle puisque $\widetilde{W}_{\lambda_n e_1, 1}^{\mathbb{B}} \circ R_{x_n}^{-1} = \widetilde{W}_{x_n, 1}^{\mathbb{B}}$. \square

7.3 Le cas d'un cône de révolution

7.3.1 Prolongement en dehors du sommet

En dimension 2

En dimension 2, tous les cônes ont un bord qui est localement linéaire en dehors du sommet. Le théorème suivant est donc une conséquence immédiate du corollaire 7.21.

Théorème 7.33. *Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ un cône ouvert de sommet 0. Pour tout $x_0 \in \partial C \setminus \{0\}$ et tout $t_0 \geq 0$, la famille $\{\widetilde{W}_{x,t}^C : x \in C, t \geq 0\}$ se prolonge proprement en (x_0, t_0) .*

En dimension supérieure

En dimension $d \geq 3$, le problème n'est plus aussi simple... La technique est similaire à celle que nous avons détaillée pour le cas d'une boule. Nous nous y référerons sans cesse afin d'éviter la répétition des mêmes arguments. Soit $d \geq 3$. Nous considérons un vecteur $u \in \mathbb{S}^{d-1}$, un nombre réel $\beta \in]0, 1[$ et le cône de révolution $C = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, u \rangle > \beta \|x\|\}$.

Théorème 7.34. *Soit $C \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, un cône de révolution de sommet 0. Pour tout $x_0 \in \partial C \setminus \{0\}$ et tout $t_0 > 0$, la famille $\{W_{x,t}^C : x \in C, t \geq 0\}$ se prolonge proprement en (x_0, t_0) . La loi limite $\widetilde{W}_{x_0, t_0}^C$ est égale à $\widetilde{W}_{x_0, t_0}^D(* | \tau_C > t_0)$, où D est le demi-espace contenant C dont le bord est tangent au bord de C au point x_0 .*

Démonstration. Soit \mathbb{B} la boule inscrite dans C , tangente à ∂C en x_0 , et soit $p = \frac{\|x_0\|}{\alpha} u$ le centre de \mathbb{B} . Nous démontrons d'abord la proposition dans le cas où la suite (x_n) est portée par le segment $[x_0, p]$. Comme nous l'avons déjà remarqué, puisque \mathbb{B} est tangente à ∂D en x_0 , on a $\widetilde{W}_{x_0, t_0}^D(\tau_{\mathbb{B}} > 0) = 1$ et donc $\widetilde{W}_{x_0, t_0}^D(\tau_C > 0) = 1$, car \mathbb{B} est incluse dans C . D'autre part, puisque

$$\widetilde{W}_{x_n, t_n}^D(\tau_C \leq s) \leq \widetilde{W}_{x_n, t_n}^D(\tau_{\mathbb{B}} \leq s) ,$$

le lemme 7.31 implique que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \widetilde{W}_{x_n, t_n}^D(\tau_C \leq s) = 0 .$$

Nous pouvons donc appliquer la proposition 7.23 qui prouve que la suite $(\widetilde{W}_{x_n, t_n}^{\mathbb{B}})$ converge vers $\widetilde{W}_{x_0, t_0}^D(* | \tau_C > t_0)$.

Nous allons maintenant utiliser une propriété de changement d'échelle pour étendre le résultat précédent. Pour tout $\lambda > 0$, on note ϕ_λ la fonction de C_∞ dans lui-même définie par

$$\forall w \in C_\infty, \forall s \in \mathbb{R}^+, \quad \phi_\lambda(w)(s) = \frac{1}{\lambda} w(\lambda^2 s) .$$

L'invariance par homothétie du cône C et la propriété de changement d'échelle du mouvement brownien font que

$$\forall \lambda > 0, \forall y \in C, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \widetilde{W}_{y, t}^C = \widetilde{W}_{\lambda y, \lambda^2 t}^C \circ \phi_\lambda^{-1} .$$

Considérons alors le sous-ensemble P de C formé par la réunion des demi-droites issues de 0 et passant par le segment $]x_0, p[: P = \{lz : l > 0, z \in]x_0, p[\}$. Par définition, pour tout $y \in P$, il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda y \in]x_0, p[$. Un calcul élémentaire donne $\lambda = \frac{\|x_0\|^2}{\langle y, x_0 \rangle}$. Si (x_n) est une suite de points de P qui converge vers x_0 et si $\lambda_n = \frac{\|x_0\|^2}{\langle x_n, x_0 \rangle}$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^2 t_n = t_0$ et la suite $(\lambda_n x_n)$ est portée par le segment $]x_0, p[$ et converge vers x_0 . Il s'ensuit que la suite $(\widetilde{W}_{\lambda_n x_n, \lambda_n^2 t_n}^C)$ converge vers $\widetilde{W}_{x_0, t_0}^D(* | \tau_C > t_0)$ et, en utilisant le TTC, on en déduit que la suite $(\widetilde{W}_{x_n, t_n}^C)$ converge vers la même limite.

Pour démontrer le cas général, nous procédons de la même manière que dans le cas d'une boule (cf. proposition 7.32). Si (x_n) est une suite de points de C qui converge vers x_0 , il existe, pour tout n , une rotation vectorielle R_{x_n} d'axe $\{lu : l \in \mathbb{R}\}$ et un unique point y_n de P tels que $R_{x_n}(y_n) = x_n$. De l'invariance de C et du mouvement brownien par R_{x_n} , on déduit que $\widetilde{W}_{x_n, t_n}^C = \widetilde{W}_{y_n, t_n}^C \circ R_{x_n}^{-1}$. Cette relation, combinée avec le fait que y_n tend vers x dans P et que $(R_{x_n}(w_n))$ converge uniformément vers w dès que (w_n) converge uniformément vers w , implique la convergence de $(\widetilde{W}_{x_n, t_n}^C)$ vers $\widetilde{W}_{x_0, t_0}^D(* | \tau_C > t_0)$ par le TTC. \square

7.3.2 Prolongement au sommet

Convergence des lois fini-dimensionnelles

Dans cette section, nous démontrons que les lois fini-dimensionnelles de $\widetilde{W}_{x, 1}^C$ convergent lorsque $x \in C$ tend vers le sommet du cône C . On rappelle que pour $t \in]0, 1[$ la loi $\widetilde{W}_{x, 1}^C(X_t \in dy)$ possède la densité $\tilde{p}^C(0, x; t, y)$ donnée par la formule

$$\tilde{p}^C(0, x; t, y) = \frac{p^C(t, x, y)}{W_x(\tau_C > 1)} W_y(\tau_C > 1 - t) .$$

Afin d'établir la convergence de ces densités, nous allons utiliser l'expression du noyau de la chaleur $p^C(t, x, y)$ qui est présentée par R. Bañuelos et R. Smits dans [1]. Avant de rappeler leur résultat, introduisons quelques notations. Nous notons C_Σ l'intersection du cône C avec la sphère \mathbb{S}^{d-1} et nous supposons que c'est un ouvert régulier pour le problème de Dirichlet sur la sphère. Il existe alors une base orthonormée de fonctions propres m_j associées aux valeurs propres $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 < \dots$ satisfaisant

$$\begin{cases} Lm_j = -\lambda_j m_j & \text{sur } C_\Sigma ; \\ m_j = 0 & \text{sur } \partial C_\Sigma , \end{cases}$$

où L est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur \mathbb{S}^{d-1} . On pose $\alpha_j = \sqrt{\lambda_j + (\frac{d}{2} - 1)^2}$. Enfin, on note I_ν la fonction de Bessel modifiée d'ordre ν :

$$(7.28) \quad I_\nu(x) = \frac{2(\frac{x}{2})^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2\nu} \cosh(x \cos t) dt = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^{\nu+2m}}{m!\Gamma(\nu + m + 1)}$$

Au cours de nos calculs, nous utiliserons les faits suivants (cf. [1]) :

– il existe deux constantes $0 < c_1 < c_2$ telles que

$$(7.29) \quad \forall j \geq 1, \quad c_1 j^{\frac{1}{d-1}} \leq \alpha_j \leq c_2 j^{\frac{1}{d-1}} ;$$

– il existe une constante c telle que

$$(7.30) \quad \forall j \geq 1, \quad \|m_j\|_\infty \leq c \alpha_j^{\frac{d-1}{2}} ;$$

– si C est lipschitzien, il existe une constante c' telle que

$$(7.31) \quad \forall j \geq 1, \forall \eta \in C_\Sigma, \quad m_j^2(\eta) \leq \frac{c' m_1^2(\eta)}{I_{\alpha_j}(1)} .$$

Lemme 7.35 (Bañuelos, Smits). *Posons $x = \rho\theta$, $y = r\eta$, $\rho, r > 0$, $\theta, \eta \in C_\Sigma$. On a*

$$p^C(t, x, y) = \frac{e^{-\frac{(x^2 + \rho^2)}{2t}}}{t(\rho r)^{\frac{d}{2}-1}} \sum_{j=1}^{\infty} I_{\alpha_j} \left(\frac{\rho r}{t} \right) m_j(\theta) m_j(\eta) .$$

D'après cette expression, on devine que $p^C(t, x, y)$ est équivalent en $x = 0$ à la fonction $g(x)h(t, y)$ où

$$g(x) = \rho^{\alpha_1 - (\frac{d}{2} - 1)} m_1(\theta)$$

et

$$h(t, y) = \frac{r^{\alpha_1 - (\frac{d}{2} - 1)} e^{-\frac{r^2}{2t}}}{2^{\alpha_1} \Gamma(\alpha_1 + 1) t^{\alpha_1 + 1}} m_1(\eta) .$$

Proposition 7.36 (Equivalent des transitions du MB tué). *Pour $x = \rho\theta$, $y = r\eta$, on a*

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{p^C(t, x, y)}{g(x)} = h(t, y) ,$$

uniformément en $(t, r, \eta) \in [T, +\infty[\times [0, R] \times C_\Sigma$, pour toutes constantes positives T et R .

Démonstration. Posons $M = \frac{\rho r}{t}$. On a

$$\frac{p^C(t, x, y)}{g(x)h(t, y)} = 2^{\alpha_1} \Gamma(\alpha_1 + 1) e^{-\frac{\rho^2}{2t}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{I_{\alpha_j}(M)}{M^{\alpha_1}} \frac{m_j(\theta)}{m_1(\theta)} \frac{m_j(\eta)}{m_1(\eta)} .$$

D'après la relation (7.31), on a la majoration

$$\left| \frac{I_{\alpha_j}(M)}{M^{\alpha_1}} \frac{m_j(\theta)}{m_1(\theta)} \frac{m_j(\eta)}{m_1(\eta)} \right| \leq \frac{\kappa}{M^{\alpha_1}} \frac{I_{\alpha_j}(M)}{I_{\alpha_j}(1)} .$$

Or, en utilisant la représentation intégrale de I_{α_j} , on voit que

$$I_{\alpha_j}(M) \leq \frac{2(\frac{M}{2})^{\alpha_j}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha_j + \frac{1}{2})} \cosh(M) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2\alpha_j} dt$$

et

$$I_{\alpha_j}(1) \geq \frac{2(\frac{1}{2})^{\alpha_j}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha_j + \frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2\alpha_j} dt ,$$

donc

$$\frac{I_{\alpha_j}(M)}{I_{\alpha_j}(1)} \leq M^{\alpha_j} \cosh M ,$$

et

$$\left| \frac{I_{\alpha_j}(M)}{M^{\alpha_1}} \frac{m_j(\theta)}{m_1(\theta)} \frac{m_j(\eta)}{m_1(\eta)} \right| \leq \kappa M^{\alpha_j - \alpha_1} \cosh M .$$

Grâce à la relation (7.29), on peut voir que la série de terme général $M^{\alpha_j - \alpha_1} \cosh M$ converge uniformément sur $[0, 1 - \epsilon]$. Par conséquent, la série

$$\sum \frac{I_{\alpha_j}(M)}{M^{\alpha_1}} \frac{m_j(\theta)}{m_1(\theta)} \frac{m_j(\eta)}{m_1(\eta)}$$

est uniformément convergente en $(M, \theta, \eta) \in [0, 1 - \epsilon] \times C_\Sigma \times C_\Sigma$. En particulier, on peut passer à la limite terme à terme sous le signe somme : compte tenu du fait que

$$\lim_{M \rightarrow 0} \frac{I_{\alpha_j}(M)}{M^{\alpha_1}} \frac{m_j(\theta)}{m_1(\theta)} \frac{m_j(\eta)}{m_1(\eta)} = \begin{cases} \frac{1}{2^{\alpha_1} \Gamma(\alpha_1 + 1)} & \text{si } j = 1 ; \\ 0 & \text{si } j \geq 2 ; \end{cases}$$

on obtient

$$\lim_{M \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{I_{\alpha_j}(M)}{M^{\alpha_1}} \frac{m_j(\theta)}{m_1(\theta)} \frac{m_j(\eta)}{m_1(\eta)} = \frac{1}{2^{\alpha_1} \Gamma(\alpha_1 + 1)} ,$$

uniformément en $(\theta, \eta) \in C_\Sigma \times C_\Sigma$. Cela suffit à démontrer la proposition. \square

Proposition 7.37. *La fonction de la variable y*

$$\sup_{\|x\| \leq \frac{1}{2}} \left| \frac{p^C(1, x, y)}{g(x)} \right|$$

est intégrable sur \mathbb{R}^d .

Démonstration. En utilisant les relations (7.30) et (7.31), on voit que

$$\begin{aligned} \left| \frac{p^C(1, x, y)}{g(x)} \right| &= \frac{e^{-\frac{(\rho^2 + r^2)}{2}}}{r^{\frac{d}{2} - 1} \rho^{\alpha_1}} \sum_{j=1}^{\infty} I_{\alpha_j}(\rho r) \left| \frac{m_j(\theta)}{m_1(\theta)} m_j(\eta) \right| \\ &\leq \frac{e^{-\frac{r^2}{2}}}{r^{\frac{d}{2} - 1} \rho^{\alpha_1}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{I_{\alpha_j}(\rho r)}{I_{\alpha_j}(1)^{\frac{1}{2}}} \alpha_j^{\frac{d-1}{2}} . \end{aligned}$$

Comme dans la démonstration précédente, on a

$$I_{\alpha_j}(\rho r) \leq \frac{2(\frac{\rho r}{2})^{\alpha_j}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha_j + \frac{1}{2})} \cosh(\rho r) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2\alpha_j} dt$$

et

$$I_{\alpha_j}(1) \geq \frac{2(\frac{1}{2})^{\alpha_j}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha_j + \frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2\alpha_j} dt .$$

En posant $\omega_{\alpha_j} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2\alpha_j} dt$, on obtient alors

$$\frac{I_{\alpha_j}(\rho r)}{I_{\alpha_j}(1)^{\frac{1}{2}}} \leq \kappa \cosh(\rho r) \left(\frac{\rho r}{\sqrt{2}} \right)^{\alpha_j} \frac{\sqrt{\omega_{\alpha_j}}}{\Gamma(\alpha_j + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}} .$$

Comme l'intégrale de Wallis $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt$ est équivalente à $cn^{-\frac{1}{2}}$, on voit que la quantité ω_{α_j} est équivalente à $c\alpha_j^{-\frac{1}{2}}$. On déduit aussi facilement de la formule de Stirling que $\Gamma(\alpha_j + \frac{1}{2}) \geq c\alpha_j^{\alpha_j} e^{-\alpha_j}$. D'où

$$\frac{I_{\alpha_j}(\rho r)}{I_{\alpha_j}(1)^{\frac{1}{2}}} \leq \kappa \cosh(\rho r) \left(\frac{\sqrt{e}\rho r}{\sqrt{2}} \right)^{\alpha_j} \frac{\alpha_j^{-\frac{1}{4}}}{\alpha_j^{\alpha_j/2}} .$$

Et, finalement, on obtient la majoration

$$\left| \frac{p^C(1, x, y)}{g(x)} \right| \leq \kappa \frac{e^{-\frac{r^2}{2}}}{r^{\frac{d}{2}-1}\rho^{\alpha_1}} \cosh(\rho r) \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{e}\rho r}{\sqrt{2}} \right)^{\alpha_j} \frac{\alpha_j^{\frac{2d-3}{4}}}{\alpha_j^{\alpha_j/2}} .$$

Comme $\alpha_j \geq \alpha_1$, le majorant précédent est une fonction croissante de ρ , et donc

$$\sup_{\rho \leq \frac{1}{2}} \left| \frac{p^C(1, x, y)}{g(x)} \right| \leq \kappa \frac{e^{-\frac{r^2}{2}}}{r^{\frac{d}{2}-1}} \cosh\left(\frac{r}{2}\right) \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{e}r}{2\sqrt{2}} \right)^{\alpha_j} \frac{\alpha_j^{\frac{2d-3}{4}}}{\alpha_j^{\alpha_j/2}} =: f(r) .$$

La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$ (comme $\alpha_j > (\frac{d}{2} - 1)$ il n'y a pas de problème en $r = 0$) et donc intégrable sur tout compact. Majorons maintenant la somme apparaissant dans la définition de f pour les grandes valeurs de r . Soit $M \geq 1$. Lorsque $2n \leq \alpha_j \leq 2n + 1$, on a

$$M^{\alpha_j} \frac{\alpha_j^{\frac{2d-3}{4}}}{\alpha_j^{\alpha_j/2}} \leq M^{2n+1} \frac{(2n+1)^{\frac{2d-3}{4}}}{(2n)^n} = M(M^2/2)^n \frac{(2n+1)^{\frac{2d-3}{4}}}{n^n} .$$

Comme $\alpha_j > c_1 j^{\frac{1}{d-1}}$, le nombre d'indices j pour lesquels on a $\alpha_j \leq 2n + 1$ est inférieur à $\left(\frac{2n+1}{c_1}\right)^{d-1}$. Si l'on choisit K suffisamment grand, on a donc la majoration

$$\sum_{j=1}^{\infty} M^{\alpha_j} \frac{\alpha_j^{\frac{2d-3}{4}}}{\alpha_j^{\alpha_j/2}} \leq M \sum_{n=1}^{\infty} (M^2/2)^n \frac{n^K}{n^n} \leq P(M) e^{M^2/2} ,$$

où P est un polynôme. En appliquant ce résultat, pour $r \geq 2\sqrt{2/e}$, avec $M = \frac{\sqrt{e}r}{2\sqrt{2}}$, on obtient alors

$$f(r) \leq \kappa \frac{e^{-(1-e/8)\frac{r^2}{2}}}{r^{\frac{d}{2}-1}} P(r) \cosh\left(\frac{r}{2}\right) ,$$

ce qui est suffisant. □

Proposition 7.38. *Pour tout $t \in [0, 1]$, on a*

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \tilde{p}^C(0, x; t, y) = \frac{h(t, y)}{\int h(1, z) dz} W_y(\tau_C > 1 - t),$$

uniformément sur $\{y \in C : \|y\| \leq R\}$, pour toute constante positive R .

Rappelons que $W_x(\tau_C > 1) = \int p^C(1, x, z) dz$. Vu les propositions 7.36 et 7.37, le théorème de convergence dominée donne

$$(7.32) \quad \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{W_x(\tau_C > 1)}{g(x)} = \int h(1, z) dz.$$

Comme

$$\tilde{p}^C(0, x; t, y) = \frac{p^C(t, x, y)}{W_x(\tau_C > 1)} W_y(\tau_C > 1 - t) = \frac{p^C(t, x, y)}{g(x)} \frac{g(x)}{W_x(\tau_C > 1)} W_y(\tau_C > 1 - t),$$

le résultat annoncé se déduit de la proposition 7.36 et de la relation (7.32).

Remarque. Dans [1], R. Bañuelos et R. Smits montrent que l'expression du noyau de la chaleur sous forme de série peut être intégrée terme à terme et obtiennent ainsi une expression de $W_x(\tau_C > t)$ dont ils déduisent un équivalent lorsque t tend vers l'infini pour x fixé. L'utilisation que nous faisons de l'expression du noyau de la chaleur est inverse, puisque nous commençons par en déduire un équivalent (dont nous avons de toute façon besoin pour le problème que nous étudions) que nous intégrons ensuite. Remarquons que par changement d'échelle on déduit aisément de (7.32) que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{W_x(\tau_C > t)}{g(t^{-1/2}x)} = \int h(1, z) dz,$$

uniformément sur $\{x \in C : \|x\| \leq R\}$, pour toute constante positive R . Pour un cône lipschitzien, la convergence est donc plus forte que celle annoncée par R. Bañuelos et R. Smits dans [1], Corollary 1.

La proposition 7.38 ne suffit pas à démontrer la convergence des lois

$$\widetilde{W}_{x,1}^C(X_t \in dy) = \tilde{p}^C(0, x; t, y) dy$$

lorsque $x \in C$ tend vers 0 parce que nous ne savons pas *a priori* si la limite des densités

$$\tilde{p}^C(0, 0; t, y) := \frac{h(t, y)}{\int h(1, z) dz} W_y(\tau_C > 1 - t)$$

est elle aussi une densité de probabilité (sauf bien sûr pour $t = 1$). Il nous semble difficile de le vérifier par un calcul direct ; cependant, lorsque C est un cône de révolution, nous pouvons établir le lemme suivant qui va nous permettre de conclure.

Lemme 7.39. *Pour tout $t \in [0, 1[$, on a*

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \sup_{\|x\| \leq 1} \widetilde{W}_{x,1}^C(\|X_t\| > R) = 0.$$

En d'autres termes, la famille $\{\widetilde{W}_{x,1}^C(X_t \in dy) : x \in C, \|x\| \leq 1\}$ est tendue.

Démonstration. Soit x un point de C tel que $\|x\| \leq 1$, et soit $R > 2$. Notons $\rho = \tau_{B(0,2)}$ le temps de sortie de $B(0, 2)$. Puisque une trajectoire issue de x ne peut pas se trouver en dehors de $B(0, R)$ à l'instant t sans avoir quitté auparavant la boule $B(0, 2)$, on a

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{x,1}^C(\|X_t\| > R) &= \widetilde{W}_{x,1}^C(\rho < t; \|X_t\| > R) \\ &= \widetilde{W}_{x,1}^C(\rho < t; \widetilde{W}_{X_{\rho},1-\rho}^C(\|X_{t-s}\| > R)|_{s=\rho}) \\ &\leq \sup_{y \in C \cap S(0,2); s \in [0,t]} \widetilde{W}_{y,1-s}^C(\|X_{t-s}\| > R). \end{aligned}$$

Si ce dernier majorant ne tend pas vers 0 quand R tend vers l'infini, alors on peut trouver des suites $(y_n) \in C \cap S(0, 2)$ et $(s_n) \in [0, t]$ telles que

$$(7.33) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \widetilde{W}_{y_n,1-s_n}^C(\|X_{t-s_n}\| > n) > 0.$$

Quitte à extraire des sous-suites, on peut toujours supposer que (y_n) converge vers un point $y \in \overline{C} \cap S(0, 2)$ et que (s_n) converge vers un $s \in [0, t]$. Mais alors, on sait que la suite $(\widetilde{W}_{y_n,1-s_n}^C)$ est convergente, donc la suite $(\widetilde{W}_{y_n,1-s_n}^C(X_{t-s_n} \in dy))$ l'est aussi, et par conséquent (7.33) ne peut pas être vrai. \square

Proposition 7.40. *Les lois marginales de $\widetilde{W}_{x,1}^C$ convergent lorsque $x \in C$ tend vers 0.*

Démonstration. D'après la proposition 7.38, $\widetilde{p}^C(0, x; t, y)$ converge vers $\widetilde{p}^C(0, 0; t, y)$ uniformément sur les compacts lorsque $x \in C$ tend vers 0. Pour tout $R > 0$, on a donc

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow 0} \int |\widetilde{p}^C(0, x; t, y) - \widetilde{p}^C(0, 0; t, y)| dy \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \int_{B(0,R)^c} \widetilde{p}^C(0, x; t, y) dy + \int_{B(0,R)^c} \widetilde{p}^C(0, 0; t, y) dy.$$

Vu le lemme 7.39 et le fait que $\widetilde{p}^C(0, 0; t, y)$ est intégrable, en faisant tendre R vers l'infini dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow 0} \int |\widetilde{p}^C(0, x; t, y) - \widetilde{p}^C(0, 0; t, y)| dy = 0.$$

Cela démontre que $\widetilde{p}^C(0, 0; t, y)$ est une densité de probabilité et que les lois $\widetilde{W}_{x,1}^C(X_t \in dy)$ convergent vers la mesure de probabilité $\widetilde{p}^C(0, 0, t, y) dy$ lorsque $x \in C$ tend vers 0. Le résultat se déduit alors du critère de convergence donné par le corollaire 7.11. \square

Tension

Proposition 7.41. *Pour toute suite $(x_n) \in C$ convergeant vers 0, la suite de mesures de probabilité $(\widetilde{W}_{x_n,1}^C)$ est tendue.*

Démonstration. D'après Billingsley [2], il suffit de démontrer que, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \widetilde{W}_{x_n,1}^C(\chi(\delta, 0, 1) > \epsilon) = 0,$$

où $\chi(\delta, a, b)w = \sup\{\|w(s) - w(t)\| : |s - t| \leq \delta, s, t \in [a, b]\}$ est l'oscillation d'ordre δ sur l'intervalle $[a, b]$. La méthode employée ici est adaptée de Shimura [28] : une grande oscillation ne peut se produire que loin de l'origine, là où le comportement des trajectoires est gouverné par des lois dont on connaît bien le comportement.

Soit $\epsilon > 0$. Puisque la fonction $\chi(\delta, \cdot, \cdot)$ est sous-additive en tant que fonction d'intervalles, on a

$$\widetilde{W}_{x_n,1}^C(\chi(\delta, 0, 1) > 4\epsilon) \leq \underbrace{\widetilde{W}_{x_n,1}^C(\chi(\delta, 0, \frac{1}{2}) > 3\epsilon)}_{a_n(\delta)} + \underbrace{\widetilde{W}_{x_n,1}^C(\chi(\delta, \frac{1}{2}, 1) > \epsilon)}_{b_n(\delta)}.$$

Commençons par contrôler $b_n(\delta)$. D'après la proposition 7.40, les lois marginales $\widetilde{W}_{x_n,1}^C(X_{\frac{1}{2}} \in dy)$ convergent vers une loi possédant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Il s'ensuit que

$$\lim_{r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \widetilde{W}_{x_n,1}^C(X_{\frac{1}{2}} \in \mathcal{O}_r^R) = 1.$$

Fixons un nombre réel $\alpha > 0$ et choisissons $0 < r < R$ tels que $\inf_n \widetilde{W}_{x_n,1}^C(X_{\frac{1}{2}} \in \mathcal{O}_r^R) \geq 1 - \alpha$. On a alors

$$b_n(\delta) \leq \widetilde{W}_{x_n,1}^C(X_{\frac{1}{2}} \in \mathcal{O}_r^R; \chi(\delta, \frac{1}{2}, 1) > \epsilon) + \alpha,$$

puis, en utilisant la propriété de Markov,

$$\begin{aligned} b_n(\delta) &\leq \widetilde{W}_{x_n,1}^C\left(X_{\frac{1}{2}} \in \mathcal{O}_r^R; \widetilde{W}_{X_{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}}^C(\chi(\delta, 0, \frac{1}{2}) > \epsilon)\right) + \alpha \\ &\leq \sup\left\{\widetilde{W}_{y, \frac{1}{2}}^C(\chi(\delta, 0, \frac{1}{2}) > \epsilon) : y \in C \cap \mathcal{O}_r^R\right\} + \alpha. \end{aligned}$$

Or, si $\sup\{\widetilde{W}_{y, \frac{1}{2}}^C(\chi(\delta, 0, \frac{1}{2}) > \epsilon) : y \in C \cap \mathcal{O}_r^R\}$ ne tend pas vers 0 quand δ tend vers 0, on peut trouver une suite (δ_n) qui tend vers 0 et une suite $(y_n) \in C$ qui converge vers un point $y \in \overline{C} \setminus \{0\}$ telles que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \widetilde{W}_{y_n, \frac{1}{2}}^C(\chi(\delta_n, 0, \frac{1}{2}) > \epsilon) > 0,$$

ce qui est absurde puisque la suite $(\widetilde{W}_{y_n, \frac{1}{2}}^C)$ est convergente (cf. théorème 7.7 et théorème 7.33 ou 7.34 selon la dimension), donc tendue. Cela démontre que $\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_n b_n(\delta) \leq \alpha$, et, puisque α est quelconque,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n(\delta) = 0.$$

Occupons-nous maintenant de $a_n(\delta)$. Soit $\rho = \tau_{B(0, \epsilon)}$ le temps de sortie de la boule de centre 0 et de rayon ϵ . Puisque l'oscillation d'une trajectoire reste plus petite que 2ϵ tant qu'elle n'a pas quitté $B(0, \epsilon)$, on a

$$\begin{aligned} a_n(\delta) &\leq \widetilde{W}_{x_n,1}^C(\rho < \frac{1}{2}; \chi(\delta, \rho, \frac{1}{2}) > \epsilon) \\ &\leq \widetilde{W}_{x_n,1}^C\left(\rho < \frac{1}{2}; \widetilde{W}_{X(\rho), 1-\rho}^C(\chi(\delta, 0, 1) > \epsilon)\right). \end{aligned}$$

En observant que si $X_0 \in B(0, \epsilon)$ et $\rho < \infty$, alors $X(\rho)$ se trouve dans \mathbb{S}_ϵ par continuité des trajectoires, il vient

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n(\delta) \leq \sup\{\widetilde{W}_{y,t}^C(\chi(\delta, 0, 1) > \epsilon) : y \in C \cap \mathbb{S}_\epsilon, t \in [\frac{1}{2}, 1]\}.$$

On conclut alors comme pour $b_n(\delta)$. □

Remarque. Si l'on n'avait pas introduit le terme $b_n(\delta)$, on se serait retrouvé à devoir montrer que $\sup\{\widetilde{W}_{y,t}^C(\chi(\delta, 0, 1) > \epsilon) : y \in C \cap \mathbb{S}_\epsilon, t \in [0, 1]\}$ tend vers 0, ce qui pose problème puisqu'on ne connaît pas le comportement de $\widetilde{W}_{y,t}^C$ quand t tend vers 0 et y tend vers le bord, sauf dans le cas de la dimension 2.

Conclusion

Des propositions 7.40 et 7.41, on déduit finalement le théorème :

Théorème 7.42. *Lorsque $x \in C$ tend vers le sommet 0 du cône, le mouvement brownien issu de x et conditionné à rester dans C pendant une unité de temps converge en loi vers un processus de Markov inhomogène dont les transitions $\tilde{p}^C(s, x, t, y)$, $s, t \in [0, 1]$, $x, y \in \overline{C}$ sont données par*

$$\tilde{p}^C(0, 0, t, y) = \frac{\|y\|^{\alpha_1 - (\frac{d}{2} - 1)} e^{-\frac{\|y\|^2}{2t}}}{2^{\alpha_1} \Gamma(\alpha_1 + 1) t^{\alpha_1 + 1}} m_1 \left(\frac{y}{\|y\|} \right) W_y(\tau_C > 1 - t)$$

et

$$\tilde{p}^C(s, x, t, y) = p^C(t - s, x, y) \frac{W_y(\tau_C > 1 - t)}{W_x(\tau_C > 1 - s)}, \quad x, y \in C, 0 < s < t.$$

Le processus limite, dont la loi sera notée $\widetilde{W}_{0,1}^C$, est un processus de Markov inhomogène, issu de l'origine, qui entre immédiatement dans C et n'en ressort pas avant l'instant 1. Nous appellerons ce processus C -méandre brownien. Pour terminer cette section, nous allons calculer la probabilité que le C -méandre brownien quitte le cône C avant un instant fixé $t > 1$.

Proposition 7.43. *Pour tout $t > 1$, on a*

$$\widetilde{W}_{0,1}^C(\tau_C > t) = t^{-\frac{\alpha_1}{2} + \frac{(d-2)}{4}}.$$

Démonstration. D'après la propriété de Markov et l'expression des transitions, on a

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{0,1}^C(\tau_C > t) &= \widetilde{W}_{0,1}^C(\tau_C > 1; W_{X_1}(\tau_C > t - 1)) \\ &= \frac{1}{2^{\alpha_1} \Gamma(\alpha_1 + 1)} \int_C \|y\|^{\alpha_1 - (\frac{d}{2} - 1)} e^{-\frac{\|y\|^2}{2}} m_1 \left(\frac{y}{\|y\|} \right) W_y(\tau_C > t - 1) dy. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $y = \sqrt{t}u$, l'intégrale précédente devient

$$\frac{t^{\frac{\alpha_1}{2} + \frac{d+2}{4}}}{2^{\alpha_1} \Gamma(\alpha_1 + 1)} \int_C \|u\|^{\alpha_1 - (\frac{d}{2} - 1)} e^{-t \frac{\|u\|^2}{2}} m_1 \left(\frac{u}{\|u\|} \right) W_{\sqrt{t}u}(\tau_C > t - 1) du.$$

Par changement d'échelle, on a $W_{\sqrt{t}u}(\tau_C > t - 1) = W_u(\tau_C > 1 - 1/t)$, et l'on voit ainsi apparaître la transition $\tilde{p}^C(0, 0, 1/t, u)$ dans l'intégrale précédente qui se récrit

$$t^{-\frac{\alpha_1}{2} + \frac{(d-2)}{4}} \int_C \tilde{p}^C(0, 0, 1/t, u) du.$$

D'où le résultat. □

Chapitre 8

Principe d'invariance pour des marches aléatoires conditionnées

Résumé. E. Bolthausen a démontré (cf. [3]) que le processus de Donsker associé à une marche aléatoire centrée de carré intégrable, conditionné à rester positif pendant une unité de temps, converge en loi vers un méandre brownien. En dimension 2, sous une hypothèse de décroissance lente de la probabilité pour que la marche reste dans un cône jusqu'à l'instant n , nous obtenons un résultat analogue à celui de E. Bolthausen pour le processus de Donsker conditionné à rester dans un cône pendant une unité de temps.

8.1 Marche aléatoire et processus de Donsker conditionné

8.1.1 Quelques définitions et propriétés élémentaires

Considérons une suite $(\xi_n)_{n \geq 1}$ de vecteurs aléatoires de \mathbb{R}^d définis sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que les vecteurs ξ_n sont indépendants et identiquement distribués, avec $\mathbb{E}(\xi_n) = 0$ et $Cov(\xi_n) = I_d$, où I_d est la matrice identité de $M_d(\mathbb{R})$, et l'on forme la marche aléatoire $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$. Pour tout entier $n \geq 1$, on appelle *processus de Donsker d'ordre n* le processus $\{\mathcal{S}_n(t), t \geq 0\} \in C_\infty$ valant S_k/\sqrt{n} aux instants $t = k/n$ et interpolé linéairement ailleurs :

$$\forall t \geq 0, \quad \mathcal{S}_n(t) = \frac{S_{[nt]} + (nt - [nt])\xi_{[nt]+1}}{\sqrt{n}}.$$

Nous noterons D_n l'ensemble des trajectoires de processus de Donsker d'ordre n , c'est-à-dire l'ensemble des trajectoires $w \in C_\infty$ qui sont linéaires sur tous les intervalles $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, $k \geq 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on note W_x^n la loi sur C_∞ du processus $x + \mathcal{S}_n$. L'espérance associée à cette mesure sera aussi notée W_x^n :

$$\forall F \in \mathcal{F}, \quad W_x^n(F) = \int F(w) W_x^n(dw).$$

L'indépendance et la stationnarité des accroissements de la marche (S_n) se traduisent en une propriété de Markov pour le processus de Donsker associé :

Proposition 8.1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, tout $s = k/n$, tout $A \in \mathcal{F}_s$ et tout $B \in \mathcal{F}_\infty$, on a*

$$W_x^n(A; \theta_s^{-1}B) = W_x^n(A; W_{X_s}^n(B)).$$

Remarque. Le processus de Donsker n'est pas un processus de Markov au sens habituel du terme. D'une part, la propriété de Markov n'est valable qu'en des instants de la forme k/n , et d'autre part, la prédictabilité de ce processus fait que l'on ne peut pas remplacer \mathcal{F}_s par \mathcal{F}_{s+} dans l'énoncé : par construction, immédiatement après $s = k/n$, on connaît le futur de \mathcal{S}_n jusqu'à l'instant $s + \frac{1}{n}$, de sorte que $\mathcal{F}_{s+} = \mathcal{F}_{s+\frac{1}{n}}$.

Soit un entier $n \geq 1$. On dira qu'un temps d'arrêt τ est *adapté* à W^n si, sous cette loi, τ est de la forme k/n , $k \geq 0$, autrement dit si $W^n(n\tau \in \mathbb{N}) = 1$. Le processus de Donsker vérifie la propriété de Markov forte suivante :

Proposition 8.2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, tout temps d'arrêt τ adapté à W^n , tout $A \in \mathcal{F}_\tau$ et toute fonction $f(s, w)$ mesurable positive ou bornée, on a*

$$W_x^n(A; \tau < \infty; f(\tau, \theta_\tau)) = W_x^n(A; \tau < \infty; W_{X_\tau}^n(f(s, \cdot))|_{s=\tau}).$$

Nous terminons ces quelques rappels en citant sans démonstration le principe d'invariance de Donsker. C'est l'un des résultats les plus importants de la théorie des marches aléatoires et nous n'aurons de cesse de l'utiliser.

Théorème 8.3 (Principe d'invariance de Donsker). *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la suite (W_x^n) converge en loi sur \mathcal{C}_∞ vers le mouvement brownien W_x lorsque n tend vers l'infini.*

Nous allons maintenant définir les processus conditionnés qui sont le sujet de ce chapitre. Considérons un cône convexe C tel que $\mathbb{P}(\xi_1 \in C) > 0$ et notons $T_C = \inf\{n \geq 1 : S_n \notin C\}$ le temps de sortie de C pour la marche aléatoire. Comme un cône convexe est un semi-groupe, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}(T_C > n) = \mathbb{P}(S_1, S_2, \dots, S_n \in C) \geq \mathbb{P}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in C) = \mathbb{P}(\xi_1 \in C)^n > 0,$$

et les lois conditionnelles

$$\mathbb{P}(S_n \in * | T_C > n)$$

sont bien définies. La question à laquelle nous nous intéressons consiste à savoir si les lois

$$\mathbb{P}(S_n/\sqrt{n} \in * | T_C > n)$$

convergent, et à identifier la loi limite. Plutôt que d'étudier le problème sous cette forme qui est celle d'un théorème limite central pour la marche conditionnée, nous allons directement nous poser la question d'un théorème limite central fonctionnel, c'est-à-dire étudier la convergence sur \mathcal{C}_∞ des lois

$$\mathbb{P}(S_n \in * | T_C > n).$$

Afin d'éviter de jongler continuellement entre la marche aléatoire et le processus de Donsker qui lui est associé, nous allons commencer par définir toutes les lois qui nous intéressent comme des lois conditionnelles sur l'espace des trajectoires \mathcal{C}_∞ . Pour tout $t > 0$, on note $\sigma_t C$ l'ensemble des trajectoires qui ne quittent pas C avant l'instant t :

$$\sigma_t C = \{w \in \mathcal{C}_\infty : w(s) \in C, \forall s \in]0, t]\}.$$

Comme nous n'avons pas supposé que C est ouvert ou fermé, l'ensemble $\sigma_t C$ n'est pas nécessairement mesurable. Cependant, son intersection avec l'ensemble (mesurable) D_n des trajectoires qui sont linéaires entre les instants k/n et $(k+1)/n$ ($\forall k \geq 0$) est quant à elle mesurable. Cela suffit à rendre rigoureuses des expressions comme $W_x^n(A; \sigma_t C)$, où A est un événement mesurable quelconque.

La convexité et l'invariance de C par homothétie font que, pour tous $m, n > 0$, on a

$$\mathbb{P}(\mathcal{S}_n(s) \in C, \forall s \in]0, m/n]) = \mathbb{P}\left(\frac{S_1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{S_m}{\sqrt{n}} \in C\right) = \mathbb{P}(T_C > m) > 0.$$

Si x est un point de \overline{C} , on a $x + C \subset C$, donc aussi

$$\mathbb{P}(x + \mathcal{S}_n(s) \in C, \forall s \in]0, m/n]) > 0.$$

Autrement dit, on a $W_x^n(\sigma_t C) > 0$ quels que soient $x \in \overline{C}$ et $t > 0$. Pour de tels x et t , nous définissons la loi $\widetilde{W}_{x,t}^n$ du processus de Donsker issu de x et conditionné à rester dans C jusqu'à l'instant t en posant

$$\widetilde{W}_{x,t}^n(*) = W_x^n(* | \sigma_t C) = \frac{W_x^n(*; \sigma_t C)}{W_x^n(\sigma_t C)}.$$

Notez que $\widetilde{W}_{0,1}^n(*) = \mathbb{P}(\mathcal{S}_n \in * | T_C > n)$. Dans les deux sections qui suivent, nous démontrons deux propriétés importantes de la famille de loi $\{\widetilde{W}_{x,t}^n : x \in \overline{C}, t > 0\}$.

8.1.2 Propriété de Markov

Le processus de Donsker conditionné vérifie une propriété de Markov très semblable à celle que vérifie le mouvement brownien conditionné :

Proposition 8.4 (Propriété de Markov). *Soient $x \in \overline{C}$ et $t > 0$. Pour tout $s = k/n \leq t$, tout $A \in \mathcal{F}_s$ et tout $B \in \mathcal{F}_\infty$, on a*

$$\widetilde{W}_{x,t}^n(A \cap \theta_s^{-1} B) = \widetilde{W}_{x,t}^n\left(A; \widetilde{W}_{X_s, t-s}^n(B)\right).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{x,t}^n(A; \theta_s^{-1} B) W_x^n(\sigma_t C) &= W_x^n(A; \theta_s^{-1} B; \sigma_t C) \\ &= W_x^n(A; \sigma_s C; \theta_s^{-1}\{B; \sigma_{t-s} C\}). \end{aligned}$$

Comme $\{A; \sigma_s C\} \cap D_n \in \mathcal{F}_s$, la propriété de Markov du processus de Donsker donne

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{x,t}^n(A; \theta_s^{-1} B) W_x^n(\sigma_t C) &= W_x^n(A; \sigma_s C; W_{X_s}^n(B; \sigma_{t-s} C)) \\ &= W_x^n\left(A; \sigma_s C; W_{X_s}^n(\sigma_{t-s} C) \times \widetilde{W}_{X_s, t-s}^n(B)\right) \\ &= W_x^n\left(A; \sigma_t C; \widetilde{W}_{X_s, t-s}^n(B)\right). \end{aligned}$$

□

De la même façon, on démontre la propriété de Markov forte suivante :

Proposition 8.5 (Propriété de Markov forte). *Soient $x \in \overline{C}$ et $t > 0$. Pour tout temps d'arrêt τ adapté à W^n , tout $A \in \mathcal{F}_\tau$ et toute fonction $f(s, w)$ mesurable positive ou bornée, on a*

$$\widetilde{W}_{x,t}^n(A; \tau \leq t; f(\tau, \theta_\tau)) = \widetilde{W}_{x,t}^n\left(A; \tau \leq t; \widetilde{W}_{X_\tau, t-\tau}^n(f(s, \cdot))|_{s=\tau}\right).$$

8.1.3 Convergence à l'intérieur du cône

Le but de cette section est de démontrer un résultat analogue au théorème 7.7 pour la convergence des processus de Donsker conditionnés. On suppose désormais que l'intérieur C° de C est un ouvert non vide co-régulier pour le mouvement brownien, et que $\overline{C^\circ} = \overline{C}$. Pour simplifier les énoncés, nous convenons que $\widetilde{W}_{x,t}^C$ désigne la loi $\widetilde{W}_{x,t}^{C^\circ}$ du mouvement brownien conditionné à rester à l'intérieur de C . On a alors le résultat suivant :

Théorème 8.6. *Soient un point $x \in C^\circ$ et un temps $t \geq 0$. Pour toutes suites $(x_n) \in C$ et $(t_n) > 0$ telles que $\lim x_n = x$ et $\lim t_n = t$, la suite $(\widetilde{W}_{x_n, t_n}^n)$ converge sur \mathcal{C}_∞ vers $\widetilde{W}_{x,t}^C$.*

Pour démontrer ce théorème, nous utiliserons le lemme suivant qui est analogue au lemme 7.5 et se démontre de la même façon.

Lemme 8.7. *Soient un point x de C° et un temps $t \geq 0$. Pour tout $w \in \{X_0 = x; \tau_{C^\circ} = \tau_{\overline{C}} \neq t\}$, toute suite $(w_n) \in \mathcal{C}_\infty$ convergeant vers w et toute suite $(t_n) \in \mathbb{R}^+$ convergeant vers t , on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{\{\sigma_{t_n} C\}}(w_n) = \mathbb{1}_{\{\tau_{C^\circ} > t\}}(w).$$

Démonstration du théorème 8.6. Il suffit de vérifier que pour toute fonction $f : \mathcal{C}_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée, on a

$$(8.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} W_{x_n}^n(f; \sigma_{t_n} C) = W_x(f; \tau_{C^\circ} > t).$$

Or, le lemme précédent a pour conséquence que pour W_x -presque tout w et toute suite $(w_n) \in \mathcal{C}_\infty$ convergeant vers w on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(w_n) \mathbb{1}_{\{\sigma_{t_n} C\}}(w_n) = f(w) \mathbb{1}_{\{\tau_{C^\circ} > t\}}(w).$$

Comme le principe d'invariance de Donsker assure que la suite $(W_{x_n}^n)$ converge vers W_x , la convergence (8.1) est une conséquence du TTC. \square

8.2 Le cas d'un demi-espace

Nous nous tournons maintenant vers le cas où le cône a la forme la plus simple possible, celle d'un demi-espace. Nous notons D le demi-espace ouvert $\{x \in \mathbb{R}^d : x_1 > 0\}$. Il est sous-entendu que les lois $\widetilde{W}_{x,t}^n$, $x \in \overline{D}$, $t > 0$, font référence aux processus de Donsker conditionnés à rester dans D . Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que les résultats que nous allons démontrer seraient exactement les mêmes si nous conditionnions les processus à rester dans le demi-espace fermé \overline{D} ; il est cependant délicat d'unifier les démonstrations, qui ne diffèrent pourtant que par de petits détails, et nous ne traiterons donc que le cas d'un demi-espace ouvert.

En dimension $d = 1$, E. Bolthausen ([3]) a obtenu le principe d'invariance suivant :

Théorème 8.8 (Bolthausen). *La suite de lois $(\widetilde{W}_{0,1}^n)$ converge vers la loi $\widetilde{W}_{0,1}^+$ du méandre brownien.*

Il n'est pas très difficile d'étendre son résultat en dimension plus grande, mais pour des raisons qui seront justifiées plus loin, nous voulons aussi traiter le cas où les processus ne sont pas issus de l'origine. Le résultat que nous nous proposons de démontrer est le théorème suivant :

Théorème 8.9. *Soit un temps $t \geq 0$. Pour toutes suites $(x_n) \in \overline{D}$ et $(t_n = l_n/n) > 0$ telles que $\lim x_n = 0$ et $\lim t_n = t$, la suite de lois $(\widetilde{W}_{x_n, t_n}^n)$ converge vers la loi $\widetilde{W}_{0,t}^D$ du D -méandre brownien.*

La difficulté pour adapter la démonstration de E. Bolthausen tient surtout à l'introduction d'une liberté sur la position du point de départ x_n du processus conditionné. Le théorème 8.9 est annoncé et utilisé à plusieurs reprises dans les travaux de Shimura ([26, 27]), mais il n'a jamais, à ma connaissance, publié la démonstration dans le cas général¹.

8.2.1 La méthode de Bolthausen pour la dimension 1

Avant de s'intéresser au cas général, il est utile de donner une idée précise de la méthode qu'utilise E. Bolthausen pour démontrer le théorème 8.8. Le point fondamental consiste à exprimer la loi du processus de Donsker conditionné à l'aide d'une section du processus de départ, c'est-à-dire établir une identité du type

$$(8.2) \quad \widetilde{W}_{0,1}^n(*) = W^n(X_{T+} - X_T \in *)$$

à l'aide d'un temps aléatoire T bien choisi. En notant ϕ la transformation définie par

$$\forall w \in C_\infty, \forall s \geq 0, \quad \phi(w)(s) = w(T(w) + s) - w(T(w)),$$

l'identité (8.2) devient

$$(8.3) \quad \widetilde{W}_{0,1}^n = W^n \circ \phi^{-1},$$

et si la transformation ϕ possède de bonnes propriétés de continuité, la convergence des lois W^n vers la loi du mouvement brownien W (par le principe d'invariance de Donsker) entraîne celle des lois $\widetilde{W}_{0,1}^n$ vers $W \circ \phi^{-1}$ (par le TTC). Ce procédé permet donc d'établir la convergence vers une loi limite qui ne dépend pas de la loi particulière des accroissements (ξ_i); en choisissant une marche particulière (par exemple la marche aux plus proches voisins sur \mathbb{Z}) avec laquelle on peut mener des calculs directs, il est alors possible d'identifier la loi limite. Dans ses grandes lignes, c'est la méthode employée par E. Bolthausen. Nous allons maintenant en donner les détails.

E. Bolthausen considère le temps aléatoire T défini par la formule²

$$\forall w \in C_\infty, \quad T(w) = \min\{t \geq 0 : w(s) > w(t), \forall s \in]t, t+1]\}.$$

La possibilité de « déconditionner » les lois repose largement sur la propriété suivante du temps T :

Lemme 8.10 (Propriété de coupure). *Pour tout $t \geq 0$, il existe un événement $A_t \in \mathcal{F}_t$ tel que*

$$\{T = t\} = A_t \cap \{X_s > X_t, \forall s \in]t, t+1]\}.$$

Démonstration. Comme T est un minimum, on a

$$\{T = t\} = \{X_s > X_t, \forall s \in]t, t+1]\} \cap \{\forall u < t, \exists s \in]u, u+1] \text{ t.q. } X_s \leq X_u\}.$$

Considérons un $w \in \{T = t\}$ et $u < t$. On ne peut pas avoir $w(s) > w(u)$ pour tout $s \in]u, t]$, car dans le cas contraire on aurait $w(s) > w(u)$ pour tout $s \in]u, t+1]$ et cela contredirait la définition de $T(w)$. En conséquence, on a

$$\{T = t\} = \{X_s > X_t, \forall s \in]t, t+1]\} \cap \{\forall u < t, \exists s \in]u, \min(u+1, t)] \text{ t.q. } X_s \leq X_u\},$$

et le dernier événement de cette égalité est \mathcal{F}_t -mesurable. □

1. Dans [26], M. Shimura démontre le théorème 8.9 lorsque la suite (x_n) est constante et égale à 0; il écrit : "to simplify the situation, we prove it when the $x_n = 0$. The extension for general $\{x_n\}$ will be made easily".

2. Le fait que T soit un minimum n'est pas complètement évident et doit être démontré. Soit $A = \{t > 0 : w(s) > w(t), \forall s \in]t, t+1]\}$ et supposons que $T = \inf A \notin A$. Il existe alors une suite strictement décroissante (t_n) d'éléments de A qui converge vers T . Pour une telle suite, dès que $t_n \leq T+1$, on a $w(t_{n+1}) < w(t_n)$ et donc $w(T) < w(t_n)$. Si $s \in]T, T+1]$, alors dès que $t_n < s$ on a $w(s) > w(t_n) > w(T)$. Absurde.

Nous nous tournons maintenant vers les propriétés que vérifie T relativement à W^n .

Lemme 8.11. *Le temps aléatoire T est adapté à W^n et $W^n(T < +\infty) = 1$.*

Démonstration. La première assertion se déduit de la forme particulière des trajectoires du processus de Donsker d'ordre n ; un dessin suffit à s'en convaincre. Pour ce qui est de la seconde assertion, comme $\mathbb{P}(\exists m \geq 1 \text{ t.q. } \xi_k > 0, \forall k = m+1 \dots m+n) = 1$, et vu la forme du processus de Donsker \mathcal{S}_n , on en déduit que $\mathbb{P}(\exists t > 0 \text{ t.q. } \mathcal{S}_n(s) > \mathcal{S}_n(t), \forall s \in]t, t+1]) = 1$. \square

Nous disposons maintenant des outils suffisants pour établir l'identité (8.2).

Proposition 8.12. *Pour tout $B \in \mathcal{F}$, on a*

$$W^n(X_{T+} - X_T \in B) = \widetilde{W}_{0,1}^n(B).$$

Démonstration. Avec les notations du lemme 8.10, on a

$$\begin{aligned} W^n(X_{T+} - X_T \in B) &= \sum_{k=0}^{\infty} W^n(T = k/n; X_{\frac{k}{n}+} - X_{\frac{k}{n}} \in B) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} W^n(A_{\frac{k}{n}}; X_s > X_{\frac{k}{n}}, \forall s \in]k/n, k/n + 1]; X_{\frac{k}{n}+} - X_{\frac{k}{n}} \in B) \\ \text{(propriété de Markov)} &= \sum_{k=0}^{\infty} W^n(A_{\frac{k}{n}}; W^n(B; \sigma_1 C)) \\ (8.4) &= W^n(B; \sigma_1 C) \sum_{k=0}^{\infty} W^n(A_{\frac{k}{n}}). \end{aligned}$$

En prenant $B = C_\infty$, on obtient la relation

$$1 = W^n(\sigma_1 C) \sum_{k=0}^{\infty} W^n(A_{\frac{k}{n}}),$$

qui, introduite dans l'égalité (8.4), donne finalement

$$W^n(X_{T+} - X_T \in B) = W^n(B | \sigma_1 C).$$

\square

La proposition précédente nous assure que l'identité (8.3) est vérifiée avec la fonction ϕ construite à partir du temps T . Comme annoncé dans l'introduction, pour obtenir le principe d'invariance, il suffit d'établir la continuité W -presque sûre de ϕ . Pour ce faire, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 8.13. *Sous la mesure de Wiener W , le temps T est presque sûrement fini et coïncide avec le temps aléatoire T' défini par*

$$\forall w \in C_\infty, \quad T'(w) = \inf\{t > 0 : w(s) \geq w(t), \forall s \in [t, t+1]\}.$$

Démonstration. Par changement d'échelle, pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$W(T = \infty) = W(\underbrace{(\forall t > 0, \exists s \in]t, t + \epsilon] \text{ t.q. } X_s \leq X_t)}_{A_\epsilon});$$

et, puisque les événements A_ϵ sont de plus en plus petits à mesure que ϵ décroît, il vient

$$W(T = \infty) = \lim_{\epsilon \searrow 0} W(A_\epsilon) = W(\cap_{\epsilon > 0} A_\epsilon).$$

Or, il n'est pas difficile de voir que $\cap_{\epsilon > 0} A_\epsilon$ est l'ensemble des fonctions décroissantes, et par conséquent est W -négligeable. D'où la première assertion du lemme.

Pour la démonstration de la seconde assertion, nous renvoyons le lecteur à Bolthausen ([3], Lemma 2.3). \square

Proposition 8.14. *La transformation des trajectoires $\phi : \mathcal{C}_\infty \rightarrow \mathcal{C}_\infty$ est W -presque sûrement continue.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que le temps aléatoire $T : \mathcal{C}_\infty \rightarrow \mathbb{R}^+$ est W -presque sûrement continu. Le sous-ensemble $\Omega = \{T < \infty\} \cap \{T = T'\}$ de \mathcal{C}_∞ a une mesure de Wiener pleine. Nous allons démontrer que T est continu en tout point de Ω .

Considérons un $w \in \Omega$, posons $t = T(w)$ et fixons $\epsilon \in]0, 1[$. Nous vérifions d'abord qu'il existe un $\delta > 0$ tel que

$$(8.5) \quad d(w', w) \leq \delta \Rightarrow T(w') \leq t + \epsilon.$$

Comme $w(t+1) > w(t)$, il existe un $\gamma \in]0, \epsilon[$ tel que $w(s) > w(t)$ pour tout $s \in]t, t+1+\gamma[$. Posons

$$m = \min\{w(s) : s \in [t + \gamma, t + 1 + \gamma]\} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{m - w(t)}{3} > 0.$$

Nous choisissons aussi un entier $N > t + 1 + \gamma$. Si w' est tel que $\|w - w'\|_N < \alpha$, on a à la fois

$$w'(t) < w(t) + \alpha$$

et

$$\forall s \in [t + \gamma, t + 1 + \gamma], \quad w'(s) > m - \alpha = w(t) + 2\alpha.$$

Par continuité, il existe donc au moins un $s \in]t, t + \gamma[$ tel que $w'(s) = w(t) + 2\alpha$, et si

$$s^* = \max\{s \in]t, t + \gamma[: w'(s) = w(t) + 2\alpha\},$$

alors on a $w'(s) > w'(s^*)$ pour tout $s \in]s^*, t + 1 + \gamma[$; donc $T(w') \leq t + \epsilon$. Compte tenu de la définition de la distance d , cela montre que (8.5) est vérifiée avec $\delta = \alpha/2^N$.

Démontrons maintenant qu'il existe $\delta' > 0$ tel que

$$(8.6) \quad d(w', w) < \delta' \Rightarrow t - \epsilon \leq T(w').$$

On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe une suite (w_n) telle que $d(w_n, w) \rightarrow 0$ et $t_n = T(w_n) \leq t - \epsilon$ pour tout $n \geq 0$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut toujours supposer que $t_n \rightarrow t' \leq t - \epsilon$. Si $s \in]t', t' + 1[$, alors pour tout n assez grand on a $t_n < s < t_n + 1$, donc $w_n(s) > w_n(t_n)$, et par suite $w(s) \geq w(t')$. Cela montre que $T'(w) \leq t' < t$, ce qui est absurde puisque $T'(w) = T(w)$. La relation (8.6) est donc vraie et la proposition est démontrée. \square

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction de cette section, les trois faits :

1. $\widetilde{W}_{0,1}^n = W^n \circ \phi^{-1}$ (proposition 8.12) ;
2. $\lim W^n = W$ (Principe d'invariance de Donsker) ;
3. ϕ est W -presque sûrement continue (proposition 8.14),

impliquent par le TTC que $\lim \widetilde{W}_{0,1}^n = W \circ \phi^{-1}$. Il suffit ensuite de mener des calculs (que nous ne ferons pas ici) avec la marche aux plus proches voisins sur \mathbb{Z} pour vérifier que la loi limite est bien celle du méandre brownien, et cela démontre le théorème 8.8.

8.2.2 Extension en dimension supérieure

Cette section est consacrée à la démonstration du théorème 8.9. Dans un premier temps nous considérons seulement le cas de la dimension 1 pour lequel il s'agit simplement d'étendre le résultat de E. Bolthausen lorsque la suite (x_n) des points dont sont issus les processus de Donsker conditionnés n'est pas constante et égale à l'origine.

Afin d'exprimer les lois $\widetilde{W}_{x,t}^n$ à l'aide de sections du processus non conditionné, il nous faut introduire de nouveaux temps aléatoires $T_{x,t}$ adaptés au problème, c'est-à-dire pour lesquels on a

$$(8.7) \quad \widetilde{W}_{x,t}^n(*) = W^n(X(T_{x,t} + \cdot) - X(T_{x,t}) + x \in *) .$$

Pour $t = 1$ par exemple, l'idée la plus naturelle consiste à introduire les temps

$$T_{x,1}(w) = \inf\{t > 0 : w(t) > w(s) - x, \forall s \in]t, t + 1]\} ,$$

qui donnent au moins un section $\{X(T_{x,1} + s) - X(T_{x,1}) + x, s \geq 0\}$ issue de x qui reste > 0 pendant une unité de temps. Mais on voit rapidement que ces temps ne possèdent pas la propriété de coupure (sauf pour $x = 0$). Il est possible de remédier à ce défaut de manière artificielle en imposant des conditions sur le comportement avant l'instant t . Par exemple, les temps

$$T_{x,1}(w) = \inf\{t > 0 : w(t) > w(s) - x, \forall s \in]t, t + 1], \text{ et } w(s) \leq w(t), \forall s \in [t - 1, t]\}$$

possèdent bien la propriété de coupure, mais la relation (8.7) ne supportera pas le passage à la limite car $W(T_{0,1} < \infty) = 0$.

La méthode qui fonctionne consiste en fait à construire une suite particulière d'époques de sauts et à prendre pour $T_{x,t}$ la première de ces époques qui est espacée de la suivante de plus d'une unité de temps. Nous avons découvert cette méthode en lisant les articles [26, 27] de M. Shimura dans lesquels il a pris l'habitude d'introduire le temps T de E. Bolthausen de la façon suivante : il définit une suite d'époques $(\lambda_j)_{j \geq 0}$ en posant $\lambda_0 = 0$ et, pour tout $j \geq 0$,

$$\lambda_{j+1} = \inf\{t > \lambda_j : w(t) \leq w(\lambda_j)\} ;$$

lorsque la trajectoire $w \in D_n$, le temps $T(w)$ est alors le premier des λ_j tels que $\lambda_{j+1} - \lambda_j > 1$. Remarquons que cette définition ne fonctionne pas pour le mouvement brownien puisque la suite (λ_j) est alors constante et égale à 0.

Ce procédé nous a inspiré la généralisation qui suit.

Soient $n \geq 1$, $x \geq 0$ et $t = \frac{m}{n} > 0$. On pose $\lambda_0 = 0$ et, pour tout $j \geq 0$,

$$\lambda_{j+1} = \min\{s = l/n > \lambda_j : X_s \leq X_{\lambda_j} - x\} .$$

En raison de la forme des temps considérés, la suite (λ_j) est strictement croissante et ses accroissements sont plus grands que $1/n$. On définit un temps aléatoire $T_{x,t}^n$ en posant

$$T_{x,t}^n = \min\{\lambda_j : \lambda_{j+1} - \lambda_j > t\} .$$

Ces temps vont permettre d'adapter la démonstration de E. Bolthausen au cas général. Nous introduisons aussi les temps T_t définis par

$$T_t = \min\{s > 0 : X_u > X_s, \forall u \in]s, s+t]\}.$$

Notez que $T_1 = T$.

Proposition 8.15. *Soient $n \geq 1$, $x \geq 0$ et $t = \frac{m}{n} > 0$. On a :*

1. $W^n(T_{x,t}^n \leq T_t) = 1$;
2. $T_{x,t}^n$ possède la propriété de coupure : pour tout $s = l/n \geq 0$, il existe $A_s \in \mathcal{F}_s$ tel que

$$\{T_{x,t}^n = s\} = A_s \cap \{X_u > X_s - x, \forall u \in]s, s+t]\} ;$$

3. Pour tout $B \in \mathcal{F}$,

$$W^n(X_{T_{x,t}^n+} - X_{T_{x,t}^n} + x \in B) = \widetilde{W}_{x,t}^n(B).$$

Démonstration. Notons d'abord que par définition de la suite (λ_j) , on a $X_s > X_{\lambda_j} - x$ pour tout $s = l/n \in]\lambda_j, \lambda_{j+1}[$.

1. Soit w une trajectoire de processus de Donsker d'ordre n telle que $T_t = T_t(w) < \infty$; on voit facilement que T_t est de la forme l/n . Soit λ_k le plus grand des λ_j tels que $\lambda_j \leq T_t$. Puisque $\lambda_k \leq T_t < \lambda_{k+1}$, on a $w(s) > w(\lambda_k) - x$ pour tout $s \in]\lambda_k, T_t]$. Par définition de T_t , on a aussi $w(s) > w(T_t)$ pour tout $s \in]T_t, T_t + t]$; donc $w(s) > w(\lambda_k) - x$ pour tout $s \in]\lambda_k, T_t + t]$. D'où $\lambda_{k+1} - \lambda_k > t$ et par suite $T_{x,t}^n \leq \lambda_k \leq T_t$.

2. On a

$$\begin{aligned} \{T_{x,t}^n = s\} &= \{\exists j \geq 0 \text{ t.q. } \lambda_j = s, \lambda_{j+1} - \lambda_j > t \text{ et } \forall i < j, \lambda_{i+1} - \lambda_i \leq t\} \\ &= \cup_{j \geq 0} (\{\lambda_j = s; \forall i < j, \lambda_{i+1} - \lambda_i \leq t\} \cap \{X_u > X_s - x, \forall u = k/n \in]s, s+t]\}) \\ &= (\cup_{j \geq 0} \{\lambda_j = s; \forall i < j, \lambda_{i+1} - \lambda_i \leq t\}) \cap \{X_u > X_s - x, \forall u = k/n \in]s, s+t]\}. \end{aligned}$$

Le résultat découle du fait que $\{\lambda_j = s; \forall i < j, \lambda_{i+1} - \lambda_i \leq t\} \in \mathcal{F}_s$.

3. Ce dernier point se déduit des points 1 et 2 en utilisant la même méthode que celle de la proposition 8.12. \square

Nous allons maintenant établir la propriété de continuité des $T_{x,t}^n$ dont nous aurons besoin pour appliquer le TTC. On rappelle que D_n est l'ensemble des trajectoires de processus de Donsker d'ordre n , c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de C_∞ qui sont linéaires sur tous les intervalles $[l/n, (l+1)/n]$, $l \geq 0$. Notez que $W^n(D_n) = 1$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, nous introduisons le temps aléatoire T'_t , défini par

$$T'_t = \inf\{s > 0 : X_u \geq X_s, \forall u \in [s, s+t]\}.$$

Notez que $T_1 = T$ et $T'_1 = T'$. On sait déjà (lemme 8.13) que $W(T = T' < \infty) = 1$. Par changement d'échelle, on en déduit que l'on a aussi $W(T_t = T'_t < \infty) = 1$. Nous avons le lemme suivant :

Lemme 8.16. *Soient $(x_n) \in \mathbb{R}^+$ et $(t_n = l_n/n) \in \mathbb{R}^+$ deux suites convergentes telles que $\lim x_n = 0$, et $t = \lim t_n \geq 0$. Pour W -presque tout w et toute suite $(w_n) \in (D_n)$ convergeant vers w , on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{x_n, t_n}^n(w_n) = T_t(w).$$

Démonstration. Nous allons distinguer les cas $t = 0$ et $t > 0$.

On suppose d'abord que $t = 0$; dans ce cas T_t est nul par définition. Soit Ω l'ensemble des trajectoires w issues de 0 qui prennent des valeurs > 0 dans tout intervalle $[0, \epsilon]$; on rappelle que $W(\Omega) = 1$. Si on fixe $w \in \Omega$ et $\epsilon > 0$, on peut trouver un intervalle fermé $[a, b] \subset]0, \epsilon[$ sur lequel w est > 0 . Posons $m = \min_{[a, b]} w(s) > 0$. Toute fonction continue w' suffisamment proche de w vérifie à la fois $w'(0) < m/2$ et $\min_{[a, b]} w'(s) > m/2$; si s^* est le dernier instant avant a où w' prend la valeur $m/2$, alors $w'(s) > w'(s^*)$ pour tout $s \in]s^*, b]$; donc $T_{b-a}(w') \leq \epsilon$. Soit maintenant une suite $(w_n) \in (D_n)$ convergeant vers w . Comme $T_{x_n, t_n}^n(w_n) \leq T_{t_n}(w_n)$ (cela se démontre comme le point 2 de la proposition 8.15), pour tout n assez grand, on a $T_{x_n, t_n}^n(w_n) \leq T_{b-a}(w_n) \leq \epsilon$. Cela prouve que $\lim T_{x_n, t_n}^n(w_n) = 0$.

Pour le cas $t > 0$, on procède comme dans la démonstration de la proposition 8.14. Posons $\Omega = \{w \in \mathcal{C}_\infty : T_t(w) = T'_t(w) > \infty\}$; c'est un ensemble de W -mesure pleine.

On choisit $w \in \Omega$, on note $T_t = T_t(w)$ et on fixe $\epsilon \in]0, 1[$.

Vérifions d'abord qu'il existe $\delta > 0$ et $\gamma \in]0, \epsilon[$ tels que

$$(8.8) \quad d(w', w) \leq \delta \Rightarrow T_{t+\gamma}(w') \leq T_t + \epsilon .$$

Comme $w(T_t + t) > w(T_t)$, il existe un $\gamma \in]0, \epsilon[$ tel que $w(s) > w(T_t)$ pour tout $s \in]T_t, T_t + t + 2\gamma]$. Posons

$$m = \min\{w(s) : s \in [T_t + \gamma, T_t + t + 2\gamma]\} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{m - w(T_t)}{3} > 0 .$$

Nous choisissons aussi un entier $N > T_t + t + 2\gamma$. Si w' est tel que $\|w - w'\|_N < \alpha$, on a à la fois

$$w'(T_t) < w(T_t) + \alpha$$

et

$$\forall s \in [T_t + \gamma, T_t + t + 2\gamma], \quad w'(s) > m - \alpha = w(T_t) + 2\alpha .$$

Par continuité, il existe donc au moins un $s \in]T_t, T_t + \gamma[$ tel que $w'(s) = w(T_t) + 2\alpha$, et si

$$s^* = \max\{s \in]T_t, T_t + \gamma[: w'(s) = w(T_t) + 2\alpha\} ,$$

alors on a $w'(s) > w'(s^*)$ pour tout $s \in]s^*, T_t + t + 2\gamma]$; donc $T_{t+\gamma}(w') \leq T_t + \epsilon$. Compte tenu de la définition de la distance d , cela montre que (8.8) est vérifiée avec $\delta = \alpha/2^N$.

Soit maintenant une suite $(w_n) \in (D_n)$ convergeant vers w . Pour tout n assez grand, on a simultanément $d(w_n, w) < \delta$ et $t_n \leq t + \gamma$, donc $T_{t_n}(w_n) \leq T_{t+\gamma}(w_n) \leq T_t + \epsilon$. Et puisque $T_{x_n, t_n}^n \leq T_{t_n}$, on en déduit que $T_{x_n, t_n}^n(w_n) \leq T_t + \epsilon$. D'où $\limsup T_{x_n, t_n}^n(w_n) \leq T_t$.

Pour terminer cette démonstration, il ne reste plus qu'à vérifier que $\liminf T_{x_n, t_n}^n(w_n) \geq T_t$. Raisonnons par l'absurde : posons $\tau_n = T_{x_n, t_n}^n(w_n)$ et supposons que $\liminf \tau_n < T_t$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\tau_n \rightarrow \tau < T_t$. Si $s \in]\tau, \tau + t[$, pour tout n assez grand, on a $\tau_n < s < \tau_n + t_n$, donc $w_n(s) > w_n(\tau_n) - x_n$. En passant à la limite, on obtient alors $w(s) \geq w(\tau)$. Ceci montre que $T'_t(w) \leq \tau < T_t$, ce qui est absurde puisque $T'_t(w) = T_t$. \square

Nous pouvons à présent démontrer le théorème limite central fonctionnel dans le cas de la dimension 1.

Théorème 8.17. *Si $(x_n) \in \mathbb{R}^+$ et $(t_n = l_n/n) \in \mathbb{R}^+$ sont deux suites convergentes telles que $\lim x_n = 0$ et $\lim t_n = t \geq 0$, alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{W}_{x_n, t_n}^n = \widetilde{W}_{0, t}^+ .$$

Démonstration. On définit les transformations $\phi_n, \phi_t : C_\infty \rightarrow C_\infty$ en posant

$$\phi_n(w)(s) = w(T_{x_n, t_n}^n(w) + s) - w(T_{x_n, t_n}^n(w)) + x_n$$

et

$$\phi_t(w)(s) = w(T_t(w) + s) - w(T_t(w))$$

Nous savons que :

1. $\widetilde{W}_{x_n, t_n}^n = W^n \circ \phi_n^{-1}$ (proposition 8.15) ;
2. $\lim W^n = W$ (Principe d'invariance de Donsker) ;
3. Pour W -presque tout w et toute suite $(w_n) \in (D_n)$, $\lim \phi_n(w_n) = \phi_t(w)$ (lemme 8.16).

D'après le TTC, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{W}_{x_n, t_n}^n = W \circ \phi_t^{-1} .$$

Il ne reste alors qu'à identifier la limite en terme de méandre brownien. Pour cela, on introduit à nouveau l'opérateur de changement d'échelle K_t défini par

$$\forall w \in \mathcal{C}_\infty, \forall s \geq 0, \quad K_t(w)(s) = \sqrt{t}w(s/t) .$$

On déduit aisément de la définition de T_t que $T_t \circ K_t = tT_1$ puis que $K_t \circ \phi_1 = \phi_t \circ K_t$. Par conséquent, on a $W \circ \phi_1^{-1} \circ K_t^{-1} = W \circ K_t^{-1} \circ \phi_t^{-1}$, et puisque W est invariante par K_t , on obtient l'identité

$$(W \circ \phi_1^{-1}) \circ K_t^{-1} = W \circ \phi_t^{-1} .$$

Or, la démonstration du théorème 8.8 de Bolthausen montre que $W \circ \phi_1^{-1} = \widetilde{W}_{0,1}^+$, et l'on sait d'après la relation (7.11) p. 96 que $\widetilde{W}_{0,1}^+ \circ K_t^{-1} = \widetilde{W}_{0,t}^+$. Le théorème est donc démontré. \square

En dimension supérieure à 2, le théorème 8.9 ne peut pas se déduire directement du résultat obtenu en dimension 1 parce que les coordonnées du processus de Donsker ne sont pas indépendantes en général. Il faut donc refaire tout le travail en adaptant les temps $T_{x,t}^n$ au problème multidimensionnel, mais la démonstration est fondamentalement la même et ne présente aucune difficulté nouvelle. Afin de ne pas trop alourdir l'exposé, nous expliquons succinctement comment on étend le théorème 8.8 de E. Bolthausen en dimension $d \geq 2$ et nous ne donnons pas de démonstration détaillée du théorème 8.9 en dimension $d \geq 2$.

On rappelle que D est le demi-espace $\{x \in \mathbb{R}^d : x_1 > 0\}$ et que $\widetilde{W}_{0,1}^n$ est la loi du processus de Donsker d'ordre n issu de 0 et conditionné à rester dans D pendant une unité de temps. Pour toute trajectoire $w = (w_1, w_2, \dots, w_d)$, on pose

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(w) &= \min\{t \geq 0 : w(s) \in w(t) + D, \forall s \in]t, t+1]\} \\ &= \min\{t \geq 0 : w_1(s) > w_1(t), \forall s \in]t, t+1]\} \\ &= T(w_1) . \end{aligned}$$

Les propriétés de T se transmettent au temps \mathcal{T} :

1. \mathcal{T} possède la propriété de coupure : pour tout $t \geq 0$, il existe $A_t \in \mathcal{F}_t$ tel que

$$\{\mathcal{T} = t\} = A_t \cap \{w_1(s) > w_1(t), \forall s \in]t, t+1]\} ;$$

2. Sous W^n , la première coordonnée w_1 est encore un processus de Donsker d'ordre n associé à une marche centrée de variance 1, donc $T(w_1)$ est presque sûrement fini et de la forme l/n . Par conséquent, le temps \mathcal{T} est W^n -presque sûrement fini, et est adapté à W^n ;

3. \mathcal{T} est W -presque sûrement continu parce que T l'est et que deux trajectoires proches ont leurs premières coordonnées proches.

Grâce aux deux premiers points, on obtient comme à la proposition 8.12 le déconditionnement

$$\widetilde{W}_{0,1}^n(*) = W^n(X(\mathcal{T} + \cdot) - X(\mathcal{T}) \in *) ;$$

puis en passant à la limite à l'aide du TTC (ce qui est justifié par la continuité de \mathcal{T}), on en déduit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{W}_{0,1}^n = W(X(\mathcal{T} + \cdot) - X(\mathcal{T}) \in *) .$$

En utilisant l'indépendance des coordonnées du mouvement brownien, on voit facilement que, pour tout $A \in \mathcal{F}^{(1)}$ et $B \in \mathcal{F}^{(d-1)}$, on a

$$\begin{aligned} W(X(\mathcal{T} + \cdot) - X(\mathcal{T}) \in A \times B) &= W(X_1(\mathcal{T} + \cdot) - X_1(\mathcal{T}) \in A) \times W((X_2, \dots, X_d) \in B) \\ &= \widetilde{W}_{0,1}^+(A) \times W((X_2, \dots, X_d) \in B) , \end{aligned}$$

et l'on reconnaît la loi du D -méandre brownien.

8.2.3 Application aux bords localement linéaires

Soit C un cône tel que C^o soit régulier pour le mouvement brownien et $\overline{C^o} = \overline{C}$. On note à nouveau $\widetilde{W}_{x,t}^n$ la loi du processus de Donsker d'ordre n issu de x et conditionné à rester dans C jusqu'à l'instant t . Exactement comme dans le cas du mouvement brownien conditionné (cf. corollaire 7.21) on déduit du théorème 8.9 le résultat suivant :

Théorème 8.18. *Soient $x_0 \in \partial C$ et $t \geq 0$. Si C est localement un demi-espace en x_0 , alors, pour toute suite $(x_n) \in \overline{C}$ convergeant vers x_0 et toute suite $(t_n) \in \mathbb{R}^+$ convergeant vers t , la suite $(\widetilde{W}_{x_n, t_n}^n)$ converge vers $\widetilde{W}_{x_0, t}^C$.*

8.3 Cône quelconque

On rappelle que (S_n) est une marche aléatoire dans \mathbb{R}^d dont les accroissements ξ_i vérifient $\mathbb{E}(\xi_i) = 0$ et $Cov(\xi_i) = I_d$. Dans cette section, on considère à nouveau le cas où C est un cône convexe de sommet 0 tel que $\mathbb{P}(\xi_i \in C) > 0$. Pour $x \in \overline{C}$ et $t > 0$, $\widetilde{W}_{x,t}^n$ est la loi du processus de Donsker d'ordre n (associé à S_n) issu de x et conditionné à rester dans C jusqu'à l'instant t . La question à laquelle nous nous intéressons est de savoir si les lois $\widetilde{W}_{0,1}^n$ vérifient un principe d'invariance. Lorsque C est un cône de révolution, il est naturel de penser que la limite (s'il y a convergence) doit être le C -méandre brownien que nous avons identifié dans le chapitre précédent, et la question devient : à quelle(s) condition(s) a-t-on

$$\widetilde{W}_{0,1}^n \Rightarrow \widetilde{W}_{0,1}^C \quad ?$$

Avant d'énoncer les résultats que nous avons obtenus, nous introduisons deux définitions :

- une suite $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ est à *variation lente* si pour tout $t > 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f([tn])}{f(n)} = 1 .$$

Cette notion est classique. On sait en particulier qu'une telle suite est un $o(n^\epsilon)$ quel que soit $\epsilon > 0$.

- une suite $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ *décroît lentement vers 0* si f décroît vers 0 et si, pour tout $t > 1$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{f([tn])}{f(n)} > 0 .$$

8.3.1 Énoncés des principaux résultats obtenus

En dimension $d = 2$, M. Shimura ([29]) démontre que le principe d'invariance ($\widetilde{W}_{0,1}^n \Rightarrow \widetilde{W}_{0,1}^C$) est satisfait lorsque le cône C est adapté à la marche aléatoire (S_n) dans le sens suivant :

- C contient l'axe des ordonnées Oy ;
- l'ordonnée Y_i de l'accroissement $\xi_i = (X_i, Y_i)$ est centrée conditionnellement à l'abscisse X_i (*i. e.* $\mathbb{E}(Y_i | X_i) = 0$).

Il utilise essentiellement ces hypothèses pour obtenir certaines estimations difficiles en se ramenant à un problème unidimensionnel pour lequel des résultats sont déjà connus. Cette hypothèse est évidemment satisfaite lorsque les coordonnées X_i et Y_i des accroissements sont indépendantes, mais elle n'est pas tout à fait naturelle. Nous avons donc étudié en détail la démonstration de M. Shimura et nous en avons dégagé un principe assez général qui sera présenté un peu plus loin. À partir de ce principe, nous avons obtenu le théorème suivant :

Théorème 8.19. *On suppose que $d = 2$. Si les accroissements de la marche sont bornés et si $\mathbb{P}(T_C > n)$ décroît lentement vers 0, alors*

$$\widetilde{W}_{0,1}^n \Rightarrow \widetilde{W}_{0,1}^C .$$

Bien que l'hypothèse de décroissance lente de $\mathbb{P}(T_C > n)$ paraisse difficile à vérifier en pratique, sa présence est justifiée par les faits suivants :

1. sous les hypothèses du théorème de Shimura, on peut démontrer directement (en utilisant des arguments semblables aux siens) que $\mathbb{P}(T_C > n)$ décroît lentement vers 0 ;
2. les travaux [33] de N. Varopoulos montrent que cette hypothèse est satisfaite dans plusieurs cas : si la loi des accroissements est à support borné, portée par un réseau ou absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et si le cône C est dans une position adaptée³ à la loi des accroissements, alors $\mathbb{P}(T_C > n)$ décroît lentement vers 0.
3. historiquement, la première démonstration qu'a donnée D. Iglehart du principe d'invariance pour une marche réelle conditionnée à rester positive utilisait de façon cruciale l'équivalent $\mathbb{P}(T_C > n) \sim cn^{-1/2}$.
4. enfin, l'argument le plus important est que cette condition est tout simplement **nécessaire**. On a en effet le théorème suivant :

Théorème 8.20. *On suppose que $d \geq 2$ et que C est un cône de révolution. Si $\widetilde{W}_{0,1}^n \Rightarrow \widetilde{W}_{0,1}^C$, alors on a*

$$\mathbb{P}(T_C > n) = \frac{1}{n^{\frac{\alpha_1 - d - 2}{2} - \frac{d - 2}{4}}} L(n) ,$$

où L est une fonction à variation lente et α_1 est un nombre réel positif (lié au spectre du Laplacien : voir page 109).

3. Il s'agit essentiellement d'éviter des cas dégénérés. Par exemple, pour la marche simple aux quatre plus proches voisins sur \mathbb{Z}^2 , un cône C de petite ouverture peut être placé de façon à ne contenir aucun des quatre voisins de 0, et alors $\mathbb{P}(T_C > n) = 0$ quel que soit n . Afin d'éviter cela, N. Varopoulos impose au cône C d'être en « position générale », ce qui se traduit pour une marche sur \mathbb{Z}^d par la condition que pour tout $a > 0$, il existe $n \geq 1$ et $\epsilon > 0$ tels que

$$\forall x, y \in C \cap \mathbb{Z}^d, \|x - y\| \leq a, \quad \mathbb{P}_x(S_n = y; T_C > n) \geq \epsilon .$$

Une condition analogue est définie pour les marches à densité.

Démonstration. Soit $t > 1$. Observons d'abord que

$$\frac{\mathbb{P}(T_C > [tn])}{\mathbb{P}(T_C > n)} = \widetilde{W}_{0,1}^n(\sigma_{t_n} C),$$

avec $t_n = [tn]/n$. Une adaptation mineure du lemme 7.13 permet de montrer que pour tout $w \in \{X_0 = 0; \tau_{\overline{C}} = \tau_{C^o} \neq t\}$ et toute suite $(w_n) \in \{\sigma_1 C\}$ convergeant vers w , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{\{\sigma_{t_n} C\}}(w_n) = \mathbb{1}_{\{\tau_{C^o} > t\}}(w).$$

Comme $\widetilde{W}_{0,1}^C(X_0 = 0; \tau_{\overline{C}} = \tau_{C^o} \neq t) = 1$ et que $\widetilde{W}_{0,1}^n(\sigma_1 C) = 1$ pour tout n , les hypothèses du TTC sont satisfaites et l'on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{W}_{0,1}^n(\sigma_{t_n} C) = \widetilde{W}_{0,1}^C(\tau_{C^o} > t).$$

Or, nous avons déjà montré (proposition 7.43) que cette limite vaut $t^{-\frac{\alpha_1}{2} + \frac{(d-2)}{4}}$. On a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(T_C > [tn])}{\mathbb{P}(T_C > n)} = t^{-\frac{\alpha_1}{2} + \frac{(d-2)}{4}},$$

et cela prouve que la fonction $L(n) = n^{\frac{\alpha_1}{2} - \frac{(d-2)}{4}} \mathbb{P}(T_C > n)$ est à variation lente. \square

8.3.2 La méthode de Shimura

Dans cette section, on présente en détail le principe que l'on a dégagé de la démonstration de M. Shimura. Ce principe repose sur quatre « faits » que nous utilisons ici comme des hypothèses de travail. Nous donnons d'abord la liste de ces faits en indiquant les cas où nous savons qu'ils sont vérifiés : une discussion plus poussée sur leur domaine de validité sera développée plus loin, dans la section 8.3.3. Ensuite, on montrera comment ces faits permettent d'obtenir la tension de la suite $(\widetilde{W}_{0,1}^n)$, puis le principe d'invariance.

Le jeu de faits

La démonstration de M. Shimura utilise de manière plus ou moins explicite les quatre faits suivants :

Fait 8.21. *Pour tout $\epsilon > 0$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\max_{i=1 \dots n} \|\xi_i\| \geq \epsilon \sqrt{n} \mid T_C > n) = 0.$$

Commentaire. Ce fait est évidemment vérifié lorsque la marche est à pas bornés.

Fait 8.22. *Soient $x \in \partial C \setminus \{0\}$ et $t \geq 0$. Il existe une loi $\widetilde{W}_{x,t}^C$ telle que, pour toute suite $(x_n) \in \overline{C}$ convergeant vers x et pour toute suite (t_n) convergeant vers t , la suite $(\widetilde{W}_{x_n, t_n}^n)$ converge vers $\widetilde{W}_{x,t}^C$.*

Commentaire. En dimension $d = 2$, ce fait est toujours vérifié d'après le théorème 8.18.

Fait 8.23. *Les lois $\widetilde{W}_{x,1}^C$ convergent vers une certaine loi $\widetilde{W}_{0,1}^C$ lorsque $x \in C^o$ tend vers 0.*

Commentaire. Nous avons démontré dans le chapitre précédent que cela est vérifié au moins pour les cônes de révolutions en dimension quelconque (cf. théorème 7.42).

Fait 8.24. *Pour toute valeur d'adhérence \widetilde{W}' de la suite $\widetilde{W}_{0,1}^n$ et tout $t \in]0, 1]$, on a*

$$\widetilde{W}'(X_t \in \partial C) = 0.$$

Commentaire. Comme nous le verrons à la proposition 8.27, ce fait peut être déduit de l'hypothèse de décroissance lente.

Propriété de tension

Proposition 8.25. *Si les faits 8.21 et 8.22 sont vérifiés, alors la suite $(\widetilde{W}_{0,1}^n)$ est tendue.*

Démonstration. Pour tout intervalle $[a, b]$ et tout réel $\delta > 0$, on introduit le module de continuité $\chi(\delta, a, b)(w)$ d'une fonction $w \in C_\infty$ défini par

$$\chi(\delta, a, b)(w) = \sup\{\|w(s) - w(t)\| : s, t \in [a, b], |s - t| \leq \delta\}.$$

Notons que pour $c \in [a, b]$ on a $\chi(\delta, a, b) \leq \chi(\delta, a, c) + \chi(\delta, c, b)$. On rappelle que d'après un critère classique (Billingsley [2], Theorem 8.2), la suite $(\widetilde{W}_{0,1}^n)$ est tendue si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow \infty} \widetilde{W}_{0,1}^n(\chi(\delta, 0, 1) > \epsilon) = 0.$$

Soit $\epsilon > 0$. Considérons un élément w de D_n (c'est-à-dire une courbe polygonale dont les sommets sont les points $w(k/n)$, pour $k = 0, 1, \dots$), et supposons que son module de continuité $\chi(\delta, 0, 1)(w)$ soit grand, disons $> 4\epsilon$. Il est alors impossible que $w(t)$ reste dans $B(0, \epsilon)$ pour tout $t \in [0, 1]$, sinon son module de continuité serait inférieur à 2ϵ . Soit donc $k \in [1, n]$ le plus petit des entiers tels que $w(k/n)$ soit en dehors de la boule $B(0, \epsilon)$. Par définition de k , pour tout entier $l < k$, le sommet $w(l/n)$ se trouve dans $B(0, \epsilon)$, si bien que la ligne polygonale $\{w(t) : t \in [0, (k-1)/n]\}$ est contenue dans $B(0, \epsilon)$ et, par suite, on a

$$\chi(\delta, 0, (k-1)/n) \leq 2\epsilon.$$

Si l'on suppose en outre que les accroissements $\{w(l/n) - w((l-1)/n) : l = 1 \dots n\}$ sont tous majorés en norme par ϵ , alors on a

$$\chi(\delta, (k-1)/n, k/n) \leq \epsilon \quad \text{et} \quad \|w(k/n)\| \leq 2\epsilon.$$

Par sous-linéarité de l'oscillation, il vient

$$\chi(\delta, k/n, 1) > \epsilon.$$

Considérons le temps d'arrêt $\rho_n(w) = \inf\{k/n : w(k/n) \notin B(0, \epsilon)\}$. Nous venons juste de démontrer que

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{0,1}^n(\chi(\delta, 0, 1) > 4\epsilon) &\leq \widetilde{W}_{0,1}^n(\rho_n \leq 1; \epsilon \leq \|X_{\rho_n}\| \leq 2\epsilon; \chi(\delta, \rho_n, 1) > \epsilon) \\ &\quad + \mathbb{P}(\max_{i=1 \dots n} \|\xi_i\| > \epsilon\sqrt{n} \mid T_C > n). \end{aligned}$$

Par hypothèse, le dernier terme tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini et peut donc être ignoré. Grâce à la propriété de Markov, le premier terme du membre de droite de l'inégalité précédente se réécrit

$$\widetilde{W}_{0,1}^n(\rho_n \leq 1; X_{\rho_n} \in \mathcal{O}_\epsilon^{2\epsilon}; \widetilde{W}_{X_{\rho_n}, 1-\rho_n}^n(\chi(\delta, 0, 1-s) > \epsilon)|_{s=\rho_n}),$$

et peut être majoré par

$$p_{n,\delta} = \sup\{\widetilde{W}_{x,t}^n(\chi(\delta, 0, 1) > \epsilon) : x \in \mathcal{O}_\epsilon^{2\epsilon} \cap C, t \in [0, 1]\}.$$

Pour conclure, il suffit donc de démontrer que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow +\infty} p_{n,\delta} = 0.$$

Par l'absurde, supposons que $\limsup_n p_{n,\delta}$ ne tende pas vers 0 quand $\delta \rightarrow 0^+$. Il existe alors des suites $(\delta_k) \rightarrow 0^+$, $(n_k) \rightarrow \infty$, $(t_k) \rightarrow t \geq 0$ et $(x_k) \rightarrow x \in \overline{C} \setminus \{0\}$, telles que

$$(8.9) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \widetilde{W}_{x_k, t_k}^{n_k}(\chi(\delta_k, 0, 1) > \epsilon) > 0.$$

Or, nous savons que la suite $(\widetilde{W}_{x_k, t_k}^{n_k})$ est convergente (si $x \in C^o$, c'est le théorème 8.6 ; si $x \in \partial C \setminus \{0\}$, c'est le fait 8.22) donc tendue et (8.9) est absurde. \square

Un principe d'invariance général

Théorème 8.26. *Si la suite $(\widetilde{W}_{0,1}^n)$ est tendue, et si les faits 8.23 et 8.24 sont vérifiés, alors la suite $(\widetilde{W}_{0,1}^n)$ converge vers $\widetilde{W}_{0,1}^C$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que toute valeur d'adhérence de la suite $(\widetilde{W}_{0,1}^n)$ possède les mêmes lois fini-dimensionnelles que $\widetilde{W}_{0,1}^C$. Pour alléger l'exposé, nous allons simplement vérifier la coïncidence des lois 1-dimensionnelles ; la généralisation est facile. Soient donc un temps $t \in]0, 1]$, une fonction continue et bornée $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et une valeur d'adhérence \widetilde{W}' de la suite $(\widetilde{W}_{0,1}^n)$. Afin de ne pas surcharger les notations avec des sous-suites, on peut supposer, sans perdre en généralité, que $\lim \widetilde{W}_{0,1}^n = \widetilde{W}'$. Nous allons démontrer que

$$\widetilde{W}'(f(X_t)) = \widetilde{W}_{0,1}^C(f(X_t)).$$

Pour cela, nous choisissons $\lambda < t$ et nous posons $\lambda_n = \max\{k/n : k/n \leq \lambda\}$ et $t_n = \max\{k/n : k/n \leq t\}$. On supposera toujours que n est suffisamment grand pour que l'on ait $0 < \lambda_n \leq \lambda < t_n \leq t$. Nous fixons une direction u intérieure au cône, et posons $C_\epsilon = C + u\epsilon$. Pour tout $\epsilon > 0$, nous posons aussi

$$J_\epsilon^n = \widetilde{W}_{0,1}^n(X_{\lambda_n} \in C_\epsilon; f(X_{t_n})).$$

On a

$$|\widetilde{W}_{0,1}^n(f(X_{t_n})) - J_\epsilon^n| \leq \|f\| \widetilde{W}_{0,1}^n(X_{\lambda_n} \in C \setminus C_\epsilon).$$

Comme par hypothèse $\widetilde{W}_{0,1}^n \Rightarrow \widetilde{W}'$, on vérifie facilement à l'aide du théorème de Portemanteau (ou du TTC) que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \widetilde{W}_{0,1}^n(X_{\lambda_n} \in C \setminus C_\epsilon) \leq \widetilde{W}'(X_\lambda \in \partial C) = 0$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{W}_{0,1}^n(f(X_{t_n})) = \widetilde{W}'(f(X_t));$$

donc

$$(8.10) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} |\widetilde{W}'(f(X_t)) - J_\epsilon^n| = 0.$$

On calcule ensuite la limite de J_ϵ^n par une autre méthode. Par la propriété de Markov on a

$$J_\epsilon^n = \widetilde{W}_{0,1}^n \left(X_{\lambda_n} \in C_\epsilon; \widetilde{W}_{X_{\lambda_n}, 1-\lambda_n}^n(f(X_{t_n-\lambda_n})) \right) = \widetilde{W}_{0,1}^n(X_{\lambda_n} \in C_\epsilon; \phi_n(X_{\lambda_n})),$$

où l'on a posé, pour tout $x \in \overline{C}$,

$$\phi_n(x) = \widetilde{W}_{x, 1-\lambda_n}^n(f(X_{t_n-\lambda_n})).$$

Observons que d'après le théorème 8.6, pour toute suite (x_n) convergeant vers un point $x \in C^o$, la suite $\widetilde{W}_{x_n, 1-\lambda_n}^n$ converge vers $\widetilde{W}_{x, 1-\lambda}^C$, donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x_n) = \widetilde{W}_{x, 1-\lambda}^C(f(X_{t-\lambda})) =: \phi_\lambda(x).$$

Nous allons appliquer le TTC pour montrer que

$$(8.11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J_\epsilon^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{W}_{0,1}^n(X_{\lambda_n} \in C_\epsilon; \phi_n(X_{\lambda_n})) = \widetilde{W}'(X_\lambda \in C_\epsilon; \phi_\lambda(X_\lambda)).$$

Pour cela, il suffit simplement de vérifier que pour \widetilde{W}' -presque tout w et toute suite (w_n) convergeant vers w , on a

$$(8.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{C_\epsilon}(w_n(\lambda_n)) \phi_n(w_n(\lambda_n)) = \mathbb{1}_{C_\epsilon}(w(\lambda)) \phi(w(\lambda)).$$

Si $w(\lambda) \notin \partial C_\epsilon$, alors on a toujours $\mathbb{1}_{C_\epsilon}(w_n(\lambda_n)) \rightarrow \mathbb{1}_{C_\epsilon}(w(\lambda))$, et dans le cas où $\mathbb{1}_{C_\epsilon}(w(\lambda)) = 1$, on vient juste de voir que $\phi_n(w_n(\lambda_n)) \rightarrow \phi(w(\lambda))$. La convergence (8.12) est donc vérifiée, et cela démontre que (8.11) est vraie au moins pour les $\epsilon > 0$ tels que $\widetilde{W}'(X_\lambda \in \partial C_\epsilon) = 0$, c'est-à-dire presque tout $\epsilon > 0$. En se restreignant à de tels ϵ , on peut à nouveau passer à la limite pour obtenir

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} J_\epsilon^n = \widetilde{W}'(X_\lambda \in C; \phi_\lambda(X_\lambda)).$$

Vu la relation (8.10), cela prouve que

$$\widetilde{W}'(f(X_t)) = \widetilde{W}'(X_\lambda \in C; \phi_\lambda(X_\lambda)).$$

La dernière étape de la démonstration consiste à faire tendre λ vers 0 dans l'expression précédente. On rappelle que la fonction ϕ_λ est donnée par la formule

$$\phi_\lambda(x) = \widetilde{W}_{x, 1-\lambda}^C(f(X_{t-\lambda})).$$

Par changement d'échelle, on peut récrire ϕ_λ sous la forme

$$\phi_\lambda(x) = \widetilde{W}_{(1-\lambda)^{-1/2}x, 1}^C \left(f \left((1-\lambda)^{1/2} X_{\frac{t-\lambda}{1-\lambda}} \right) \right).$$

Choisissons alors une suite (λ_n) qui tend vers 0. Par hypothèse (fait 8.23), pour toute suite $(x_n) \in C^o$ convergeant vers 0, la suite $(\widetilde{W}_{(1-\lambda_n)^{-1/2}x_n, 1}^C)$ converge vers $\widetilde{W}_{0,1}^C$, donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\lambda_n}(x_n) = \widetilde{W}_{0,1}^C(f(X_t)).$$

On sait que pour tout n , on a $\widetilde{W}'(X_{\lambda_n} \in \partial C) = 0$. En dehors de la réunion de ces événements, qui a une \widetilde{W}' -mesure nulle, les trajectoires ne touchent jamais ∂C aux instants λ_n . Pour de telles trajectoires w , on a donc $w(\lambda_n) \in C$ et $w(\lambda_n) \rightarrow 0$, donc

$$\phi_{\lambda_n}(w(\lambda_n)) \rightarrow \widetilde{W}_{0,1}^C(f(X_t)).$$

Par le théorème de convergence dominée, on obtient finalement

$$\widetilde{W}'(f(X_t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{W}'(X_{\lambda_n} \in C; \phi_{\lambda_n}(X_{\lambda_n})) = \widetilde{W}'(\widetilde{W}_{0,1}^C(f(X_t))) = \widetilde{W}_{0,1}^C(f(X_t)).$$

Ce qui est bien le résultat annoncé. \square

8.3.3 Dans quels cas peut-on utiliser cette approche ?

Un exemple d'application dans le cas d'un cône du plan

Nous allons maintenant appliquer la méthode de Shimura pour démontrer le théorème 8.19, c'est-à-dire le principe d'invariance en dimension $d = 2$, pour une marche aléatoire à pas bornés et telle que $\mathbb{P}(T_C > n)$ décroît lentement vers 0. Comme nous l'avons déjà noté, les faits 8.22 et 8.23 sont vérifiés (théorème 8.18 et théorème 7.42 respectivement). Et puisque la marche est à pas bornés, le fait 8.21 est trivialement vérifié. Il ne reste donc plus qu'à établir le fait 8.24.

L'hypothèse de décroissance lente de $\mathbb{P}(T_C > n)$ permet d'obtenir le résultat suivant qui contient en particulier le fait 8.24 :

Proposition 8.27. *On suppose que $\mathbb{P}(T_C > n)$ a une décroissance lente. Si \widetilde{W}' est une valeur d'adhérence de la suite $(\widetilde{W}_{0,1}^n)$, alors pour tout fermé F , négligeable par rapport à la mesure de Lebesgue, et tout $t > 0$ on a $\widetilde{W}'(X_t \in F) = 0$.*

Démonstration. L'hypothèse de décroissance lente montre qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\mathbb{P}_0(T_C > n) \geq K\mathbb{P}_0(T_C > [n/2]).$$

Posons $t_n = [n/2]/n$. L'équation précédente, traduite sur la ligne brisée de Donsker, s'écrit aussi

$$W_0^n(\tau_C > 1) \geq KW_0^n(\tau_C > t_n).$$

Soit F un fermé négligeable. Pour tout $\epsilon > 0$, nous posons $F_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, F) \leq \epsilon\}$. D'après la propriété de Markov, on a

$$\begin{aligned} W_0^n(\|X_{t_n}\| \leq a; X_1 \in F_\epsilon; \tau_C > 1) &= W_0^n(\tau_C > t_n; \|X_{t_n}\| \leq a; W_{X_{t_n}}^n(X_{1-t_n} \in F_\epsilon; \tau_C > 1 - t_n)) \\ &\leq W_0^n(\tau_C > t_n) \sup_{\|x\| \leq a} W_x^n(X_{1-t_n} \in F_\epsilon) \\ &\leq K^{-1}W_0^n(\tau_C > 1) \sup_{\|x\| \leq a} W_x^n(X_{1-t_n} \in F_\epsilon). \end{aligned}$$

Donc

$$\widetilde{W}_{0,1}^n(\|X_{t_n}\| \leq a; X_1 \in F_\epsilon) \leq K^{-1} \sup_{\|x\| \leq a} W_x^n(X_{1-t_n} \in F_\epsilon).$$

Pour toute suite $(x_n) \in \mathbb{R}^d$ convergeant vers un point x , on sait que la suite $(W_{x_n}^n)$ converge en loi vers W_x ; comme t_n tend vers $1/2$, on en déduit que la suite de mesures $(W_{x_n}^n(X_{1-t_n} \in *))$ converge en loi vers $W_x(X_{1/2} \in *)$; puisque cette loi est absolument continue, on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} W_{x_n}^n(X_{1-t_n} \in F_\epsilon) \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} W_x(X_{1/2} \in F_\epsilon) = W_x(X_{1/2} \in F) = 0.$$

Aussi, par un argument de compacité, il vient

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|x\| \leq a} W_x^n(X_{1-t_n} \in F_\epsilon) = 0;$$

et par suite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \widetilde{W}_{0,1}^n(\|X_{t_n}\| \leq a; X_1 \in F_\epsilon) = 0.$$

Si \widetilde{W}' est une valeur d'adhérence de la suite $(\widetilde{W}_{0,1}^n)$, alors on a

$$\widetilde{W}'(\|X_{1/2}\| \leq a; X_1 \in F) = 0,$$

et, en faisant tendre a vers l'infini, on obtient

$$\widetilde{W}'(X_1 \in F) = 0 .$$

C'est bien le résultat annoncé dans le cas $t = 1$. La démonstration est similaire pour les autres temps t ; nous n'en donnons pas les détails. \square

Finalement, le théorème 8.19 est démontré.

Discutons les faits !

Nous allons ici discuter plus en détails les faits qui sont utilisés par la méthode de Shimura.

Le fait 8.24 Nous venons de voir que le fait 8.24 est toujours vérifié si $\mathbb{P}(T_C > n)$ décroît lentement vers 0. Comme il semble difficile d'obtenir ce fait sans utiliser d'estimations, je pense que l'hypothèse de décroissance lente doit accompagner toute utilisation de cette méthode.

Le fait 8.21 Si l'on fait l'hypothèse que les pas de la marche sont bornés, alors ce fait est évidemment vérifié; cependant, il me semble que cette hypothèse est un peu restrictive et j'ai cherché à m'en défaire. Pour la marche non conditionnée, il est assez facile de voir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\max_{i=1 \dots n} \|\xi_i\| > \sqrt{n}) = 0 .$$

En effet, on a

$$\mathbb{P}(\max_{i=1 \dots n} \|\xi_i\| > \sqrt{n}) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\|\xi_i\| > \sqrt{n}) = n\mathbb{P}(\|\xi_1\| > \sqrt{n}) ,$$

et toute variable ξ_1 de carré intégrable vérifie $n\mathbb{P}(\|\xi_1\| > \sqrt{n}) \rightarrow 0$. Dans le cas de la marche conditionnée par $\{T_C > n\}$, les accroissements ξ_i ne sont plus stationnaires, ni indépendants, et les techniques habituelles ne marchent pas bien. Cependant, si on fait l'hypothèse de décroissance lente de $\mathbb{P}(T_C > n)$, on peut envisager l'approche suivante : on écrit comme avant que

$$\mathbb{P}(\max_{i=1 \dots n} \|\xi_i\| > \sqrt{n} | T_C > n) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\|\xi_i\| > \sqrt{n} | T_C > n) ,$$

et on découpe la somme en deux parties

$$\sum_{i=1}^{\alpha n} + \sum_{i=\alpha n+1}^n$$

à l'aide d'un paramètre $\alpha \in]0, 1[$. Pour les indices $i \geq \alpha n + 1$, on a

$$\mathbb{P}(\|\xi_i\| > \sqrt{n}; T_C > n) \leq \mathbb{P}(T_C > \alpha n; \|\xi_i\| > \sqrt{n}) = \mathbb{P}(T_C > \alpha n)\mathbb{P}(\|\xi_1\| > \sqrt{n}) ,$$

et, grâce à l'hypothèse de décroissance lente, on en déduit que

$$\mathbb{P}(\|\xi_i\| > \sqrt{n} | T_C > n) \leq C\mathbb{P}(\|\xi_1\| > \sqrt{n}) ,$$

où C est une constante qui ne dépend que de α . Cela permet de démontrer que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=\alpha n+1}^n \mathbb{P}(\|\xi_i\| > \sqrt{n} | T_C > n) = 0 .$$

Pour contrôler l'autre partie de la somme, on utilise l'inégalité de Markov qui nous donne

$$\sum_{i=1}^{\alpha n} \mathbb{P}(\|\xi_i\| > \sqrt{n} \mid T_C > n) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\alpha n} \mathbb{E}(\|\xi_i\|^2 \mid T_C > n) \leq \alpha \max_{i=1 \dots n} \mathbb{E}(\|\xi_i\|^2 \mid T_C > n).$$

Et puisque le choix de α est arbitraire, il suffirait que $\max_{i=1 \dots n} \mathbb{E}(\|\xi_i\|^2 \mid T_C > n)$ soit borné pour obtenir le fait 8.21.

Le fait 8.23 Ce fait concerne le mouvement brownien conditionné à rester dans un cône et a été étudié dans le chapitre précédent. On rappelle que l'on a montré qu'il était vérifié en toute dimension, pour des cônes de révolution.

Le fait 8.22 Rappelons son énoncé : *Soient $x \in \partial C \setminus \{0\}$ et $t \geq 0$. Il existe une loi $\widetilde{W}_{x,t}^C$ telle que, pour toute suite $(x_n) \in \overline{C}$ convergant vers x et pour toute suite (t_n) convergant vers t , la suite $(\widetilde{W}_{x_n, t_n}^n)$ converge vers $\widetilde{W}_{x,t}^C$.*

Nous avons démontré que cela est vrai lorsque C est un cône du plan \mathbb{R}^2 ; dans ce cas, la démonstration utilisait le fait que le bord de C était localement un demi-espace en dehors du sommet. Pour démontrer ce genre de résultat en dimension $d \geq 3$ (lorsque le bord n'est plus plat), nous avons envisagé d'utiliser le même genre de techniques que dans le chapitre sur le mouvement brownien conditionné. Comme dans le cas du mouvement brownien, la technique qui consiste à conditionner d'abord le processus à rester dans un demi-espace ne permet pas de traiter le cas où la suite des temps (t_n) tend vers 0 car le pré-conditionnement est alors évanescant : son effet disparaît à la limite et il ne sert à rien. Il faut donc se résoudre à se passer de ce cas là. Étant donné que le fait 8.22 est utilisé pour démontrer la tension de la suite $(\widetilde{W}_{0,1}^n)$, voyons comment on peut modifier les arguments de la démonstration de la propositions 8.25 si l'on dispose seulement du

Fait 8.28. *Soient $x \in \partial C \setminus \{0\}$ et $t \geq 0$. Il existe une loi $\widetilde{W}_{x,t}^C$ telle que, pour toute suite $(x_n) \in \overline{C}$ convergant vers x et pour toute suite (t_n) convergant vers t , la suite $(\widetilde{W}_{x_n, t_n}^n)$ converge vers $\widetilde{W}_{x,t}^C$.*

D'abord, on pose $t_n = [n/2]/n$ et on démontre que la suite de probabilité $(\widetilde{W}_{0,1}^n(X_{t_n} \in dy))$ est tendue : pour tout $R > 1$, en posant $\rho_n = \inf\{k/n : X(k/n) \notin B(0, 1)\}$, on a

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{0,1}^n(\|X_{t_n}\| > R) &= \widetilde{W}_{0,1}^n(\rho_n \leq t_n; \|X_{t_n}\| > R) \\ &= \widetilde{W}_{0,1}^n(\rho_n \leq t_n; \widetilde{W}_{X_{\rho_n, 1-\rho_n}}^n(\|X_{t_n-s}\| > R)_{s=\rho_n}) \\ &\leq \sup_{x \in \mathcal{O}_1^2 \cap C; s \in [0, \frac{1}{2}]} \widetilde{W}_{x, 1-s}^n(\|X_{t_n-s}\| > R) + \mathbb{P}(\max_{i=1 \dots n} \|\xi_i\| > \sqrt{n} \mid T_C > n). \end{aligned}$$

Par un argument de compacité, on déduit du fait 8.28, que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathcal{O}_1^2 \cap C; s \in [0, \frac{1}{2}]} \widetilde{W}_{x, 1-s}^n(\|X_{t_n-s}\| > R) = 0.$$

(Observez que l'on évite le problème en 0 car $1 - s$ est compris entre $1/2$ et 1 .) Si l'on suppose, en outre, que le fait 8.21 est vérifié, alors on en déduit

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \widetilde{W}_{0,1}^n(\|X_{t_n}\| > R) = 0;$$

ce qui démontre la tension de la suite $(\widetilde{W}_{0,1}^n(X_{t_n} \in dy))$. Passons maintenant à la démonstration de la tension de la suite $(\widetilde{W}_{0,1}^n)$. Soit $\epsilon > 0$. Le problème en $t = 0$ apparaissait lorsqu'on majorait

$$\widetilde{W}_{0,1}^n(\chi(\delta, 0, 1) > 4\epsilon)$$

par

$$\widetilde{W}_{0,1}^n(\rho_n \leq 1; \widetilde{W}_{X_{\rho_n, 1-\rho_n}}^n(\chi(\delta, 0, 1-s) > \epsilon)_{s=\rho_n}),$$

(où $\rho_n = \inf\{k/n : X(k/n) \notin B(0, \epsilon)\}$) parce que $1 - \rho_n$ peut être proche de 0. Pour éviter cet écueil, on peut (comme on l'a fait avec le mouvement brownien) utiliser la sous-additivité de χ et, en posant $t_n = \lfloor n/2 \rfloor / n$, écrire que

$$\widetilde{W}_{0,1}^n(\chi(\delta, 0, 1) > 8\epsilon) \leq \widetilde{W}_{0,1}^n(\chi(\delta, 0, t_n) > 4\epsilon) + \widetilde{W}_{0,1}^n(\chi(\delta, t_n, 1) > 4\epsilon).$$

Le premier terme du membre de droite de cette inégalité est égal à

$$\widetilde{W}_{0,1}^n(\rho_n \leq t_n; \widetilde{W}_{X_{\rho_n, 1-\rho_n}}^n(\chi(\delta, 0, t_n - s) > \epsilon)_{s=\rho_n}),$$

et l'on va pouvoir utiliser le même argument que dans la démonstration de la proposition 8.25, en évitant cette fois le cas $t = 0$ parce que, lorsque $\rho_n \leq t_n$, on a $1 - \rho_n \geq \frac{1}{2}$.

Afin de contrôler l'autre terme, $\widetilde{W}_{0,1}^n(\chi(\delta, t_n, 1) > 4\epsilon)$, on fixe un nombre réel $\eta > 0$ et l'on choisit un $R > 0$ tel que

$$\sup_n \widetilde{W}_{0,1}^n(\|X_{t_n}\| \leq R) \geq 1 - \eta,$$

ce qui est possible puisque la suite $(\widetilde{W}_{0,1}^n(X_{t_n} \in dy))_n$ est tendue. Pour tout $n \geq 1$, on a alors

$$\widetilde{W}_{0,1}^n(\chi(\delta, t_n, 1) > 4\epsilon) \leq \widetilde{W}_{0,1}^n(\|X_{t_n}\| \leq R; \chi(\delta, t_n, 1) > 4\epsilon) + \eta.$$

Comme

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{0,1}^n(\|X_{t_n}\| \leq R; \chi(\delta, t_n, 1) > 4\epsilon) &\leq \frac{W^n(\sigma_{t_n} C; \|X_{t_n}\| \leq R; \chi(\delta, t_n, 1) > 4\epsilon)}{W^n(\sigma_1 C)} \\ &\leq \frac{W^n(\sigma_{t_n} C)}{W^n(\sigma_1 C)} \sup_{\|x\| \leq R} W_x^n(\chi(\delta, 0, 1 - t_n) > 4\epsilon), \end{aligned}$$

si l'on suppose que $\mathbb{P}(T_C > n)$ décroît lentement vers 0, alors il vient

$$\widetilde{W}_{0,1}^n(\|X_{t_n}\| \leq R; \chi(\delta, t_n, 1) > 4\epsilon) \leq K \sup_{\|x\| \leq R} W_x^n(\chi(\delta, 0, 1 - t_n) > 4\epsilon),$$

où K est une constante qui ne dépend pas de n . On en déduit que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \widetilde{W}_{0,1}^n(\|X_{t_n}\| \leq R; \chi(\delta, t_n, 1) > 4\epsilon) = 0,$$

donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \widetilde{W}_{0,1}^n(\chi(\delta, t_n, 1) > 4\epsilon) \leq \eta,$$

ce qui est suffisant.

On peut se passer de l'hypothèse de décroissance lente si l'on suppose que le fait 8.24 est vérifié; les arguments sont sensiblement différents, mais nous ne les développerons pas puisque, de toute façon, nous ne savons pas démontrer le fait 8.24 sans supposer la décroissance lente. Résumons le résultat que nous venons de démontrer :

Proposition 8.29. *On suppose que les faits 8.21 et 8.28 sont vérifiés. Si, de plus, $\mathbb{P}(T_C > n)$ décroît lentement vers 0 ou si le fait 8.24 est vérifié, alors la suite $(\widetilde{W}_{0,1}^n)$ est tendue.*

Pour étendre le principe d'invariance 8.19 en dimension $d \geq 3$ et pour des cônes de révolution, il suffit donc d'établir le fait 8.28. Comme pour le mouvement brownien, on doit pouvoir démontrer que $\widetilde{W}_{x_n, t_n}^n \Rightarrow \widetilde{W}_{x, t}^C$ lorsque $x \in \partial C \setminus \{0\}$ et que (x_n) tend vers x le long du segment joignant x au centre de la sphère inscrite dans C et tangente à ∂C en x . Dans le cas du mouvement brownien cela était suffisant parce qu'il possède la propriété d'invariance par rotation et par changement d'échelle ; mais pour le processus de Donsker, qui ne possède pas ces bonnes propriétés, on se retrouve un peu coincé.

Annexe A

Théorème limite central pour martingales

Cette annexe contient les énoncés des théorèmes limite central pour martingales que nous avons utilisés au cours de cette thèse. Le premier de ces théorèmes est en fait un principe d'invariance.

Théorème A.1 ([11], Theorem 7.2). *Soit $\{S_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ une martingale d'accroissements X_n , et soit*

$$V_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k^2 | \mathcal{F}_{k-1})$$

la variance conditionnelle. On suppose que pour tout $t \in [0, 1]$,

$$(A.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_{[nt]}}{n} = t \quad \text{en probabilité,}$$

et, pour tout $\epsilon > 0$,

$$(A.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k^2 \mathbb{1}_{\{|X_k| \geq \epsilon \sqrt{n}\}}) = 0.$$

Alors le processus $\{S_n(t), t \in [0, 1]\}$ à trajectoires continues, valant S_k/\sqrt{n} aux instants $t = k/n$ et interpolé linéairement ailleurs, converge en loi sur \mathcal{C}_1 vers le mouvement brownien lorsque n tend vers l'infini.

Le théorème suivant est un théorème limite central pour martingale bornée dans L^2 dont on trouvera un énoncé plus général dans le livre de P. Hall et C. Heyde [17].

Théorème A.2. *Soit $\{S_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ une martingale bornée dans L^2 d'accroissements X_n et de limite S . On suppose qu'il existe une suite déterministe (s_n) et une variable aléatoire γ presque sûrement finie telles que*

$$(A.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{-2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{E}(X_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}) = \gamma \quad \text{en probabilité,}$$

et, pour tout $\epsilon > 0$,

$$(A.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{-2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{E}(X_k^2 \mathbb{1}_{\{|X_k| \geq \epsilon s_n\}}) = 0.$$

Alors la suite $(s_n^{-1}(S - S_n))$ converge en loi vers une loi de fonction caractéristique

$$\phi(t) = \mathbb{E}(e^{-\frac{1}{2}\gamma t^2}) .$$

Enfin, le troisième théorème est une extension du théorème précédent à une martingale prenant ses valeurs dans l'espace \mathbb{R}^d .

Théorème A.3. Soit $\{S_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ une martingale de \mathbb{R}^d bornée dans L^2 d'accroissements X_n et de limite S . On suppose qu'il existe une suite déterministe (s_n) et une matrice aléatoire $\Gamma = [\gamma_{ij}]$ presque sûrement finie telles que, pour tous $1 \leq i, j \leq d$, on ait

$$(A.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{-2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{E}(X_k^i X_k^j | \mathcal{F}_{k-1}) = \gamma_{ij} \quad \text{en probabilité ,}$$

et, pour tout $\epsilon > 0$,

$$(A.6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{-2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{E}(\|X_k\|^2 \mathbb{1}_{\{\|X_k\| \geq \epsilon s_n\}}) = 0 .$$

Alors la suite $(s_n^{-1}S_n)$ converge en loi vers une loi de fonction caractéristique

$$\phi(t) = \mathbb{E}(e^{-\frac{1}{2}\langle t, \Gamma t \rangle}) .$$

Annexe B

Transformations préservant la convergence en loi

Dans cette section, Y et Z sont des espaces métriques munis de leurs tribus boréliennes.

Théorème B.1 (de la Transformation Continue (TTC)). *Soient $(\mu_n), \mu$ des mesures de probabilités sur Y et soient $(\phi_n), \phi : Y \rightarrow Z$ des fonctions boréliennes. On suppose que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe des ensembles mesurables $(\Omega_n^\epsilon), \Omega^\epsilon \subset Y$ tels que :*

1. *pour tout n , $\mu_n(\Omega_n^\epsilon) \geq 1 - \epsilon$ et $\mu(\Omega^\epsilon) \geq 1 - \epsilon$,*
2. *pour tout $y \in \Omega^\epsilon$ et toute suite $(y_n) \in (\Omega_n^\epsilon)$ convergeant vers y , on a $\phi_n(y_n) \rightarrow \phi(y)$.*

Si $\mu_n \Rightarrow \mu$, alors $\mu_n \circ \phi_n^{-1} \Rightarrow \mu \circ \phi^{-1}$.

Démonstration. Soient F un fermé de Z et $\epsilon > 0$. Pour tout m , posons $AF_m = \overline{\cup_{k \geq m} (\phi_k^{-1}(F) \cap \Omega_k^\epsilon)}$ et observons que l'on a

$$\limsup_n \mu_n(\phi_n^{-1}(F) \cap \Omega_n^\epsilon) \leq \limsup_n \mu_n(AF_m) \leq \mu(AF_m).$$

Comme la suite (AF_m) est décroissante, en passant à la limite quand $m \rightarrow \infty$, on obtient :

$$\limsup_n \mu_n(\phi_n^{-1}(F) \cap \Omega_n^\epsilon) \leq \mu(\cap_{m \geq 1} AF_m).$$

Si $y \in \cap_{m \geq 1} AF_m$, il existe une suite (y_k) qui tend vers y et une suite d'entiers $n_k \rightarrow \infty$ telle que chaque y_k est élément de $\phi_{n_k}^{-1}(F) \cap \Omega_{n_k}^\epsilon$. Par hypothèse, si $y \in \Omega^\epsilon$ alors $\phi_{n_k}(y_k) \rightarrow \phi(y)$ et comme F est fermé, l'élément $\phi(y)$ appartient à F . On a donc $\cap_{m \geq 1} AF_m \subset \phi^{-1}(F) \cup (\Omega^\epsilon)^c$, et il s'ensuit que

$$\limsup_n \mu_n(\phi_n^{-1}(F) \cap \Omega_n^\epsilon) \leq \mu(\phi^{-1}(F)) + \mu((\Omega^\epsilon)^c).$$

D'où :

$$\limsup_n \mu_n(\phi_n^{-1}(F)) \leq \mu(\phi^{-1}(F)) + 2\epsilon.$$

□

Théorème B.2 (Seconde version du TTC). *Soient $(\mu_n), \mu$ des mesures de probabilités sur Y et soient $(\phi_n), \phi : Y \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions boréliennes bornées par une même constante. On suppose que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe des ensembles mesurables $(\Omega_n^\epsilon), \Omega^\epsilon \subset Y$ tels que :*

1. *pour tout n , $\mu_n(\Omega_n^\epsilon) \geq 1 - \epsilon$ et $\mu(\Omega^\epsilon) \geq 1 - \epsilon$,*

2. pour tout $y \in \Omega^\varepsilon$ et toute suite $(y_n) \in (\Omega_n^\varepsilon)$ convergeant vers y , on a $\phi_n(y_n) \rightarrow \phi(y)$.

Si $\mu_n \Rightarrow \mu$, alors $\mu_n(\phi_n) \rightarrow \mu(\phi)$.

Démonstration. Si C est une borne uniforme pour les fonctions (ϕ_n) et ϕ , la fonction F définie par :

$$F(x) = \begin{cases} -C & \text{si } x < -C \\ x & \text{si } x \in [-C, +C] \\ C & \text{si } x > C \end{cases}$$

est continue sur \mathbb{R} et vérifie $F(\phi_n) = \phi_n$ et $F(\phi) = \phi$. D'après le théorème B.1, la suite de mesures $(\mu_n \circ \phi_n^{-1})$ converge faiblement vers la mesure $\mu \circ \phi^{-1}$ et l'on a donc :

$$\mu_n(\phi_n) = \mu_n(F(\phi_n)) = \mu_n \circ \phi_n^{-1}(F) \rightarrow \mu \circ \phi^{-1}(F) = \mu(F(\phi)) = \mu(\phi) .$$

□

Annexe C

Minimum des fonctions convexes

Nous avons rassemblé dans cette annexe quelques lemmes concernant le lien entre l'existence d'un minimum et le comportement à l'infini d'une fonction convexe. Ces résultats sont « classiques » mais, par manque de temps, nous n'avons pas pu trouver des références auxquelles renvoyer le lecteur.

Lemme C.1. *Pour qu'une fonction convexe $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tende vers l'infini quand $\|x\|$ tend vers l'infini il faut et il suffit que dans chaque direction $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$ la fonction $\lambda \mapsto f(\lambda\vec{u})$ tende vers l'infini quand λ tend vers $+\infty$.*

Démonstration. La condition est bien sûr nécessaire; démontrons qu'elle est suffisante. Soit $A > \max\{0, f(0)\}$. Pour chaque direction $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$, on peut choisir un nombre $\lambda_{\vec{u}}$ tel que $f(\lambda_{\vec{u}}\vec{u}) \geq 2A$. Par continuité de f , il existe alors un voisinage ouvert $O_{\vec{u}}$ de \vec{u} dans \mathbb{S}^{d-1} tel que $f(\lambda_{\vec{u}}\vec{v}) \geq A$ quel que soit $\vec{v} \in O_{\vec{u}}$. Pour chaque $\vec{v} \in O_{\vec{u}}$, on a en particulier $f(\lambda_{\vec{u}}\vec{v}) > f(0)$, donc par convexité $f(\lambda\vec{v}) \geq f(\lambda_{\vec{u}}\vec{v}) \geq A$ dès que $\lambda \geq \lambda_{\vec{v}}$. Autrement dit, pour tout couple $(\vec{v}, \lambda) \in O_{\vec{u}} \times [\lambda_{\vec{u}}, +\infty[$, on a $f(\lambda\vec{v}) \geq A$. Par compacité de la sphère, on peut extraire une famille finie $J \subset \mathbb{S}^{d-1}$ telle que la famille $\{O_{\vec{u}}, \vec{u} \in J\}$ recouvre \mathbb{S}^{d-1} . Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|x\| \geq \max_{\vec{u} \in J} \lambda_{\vec{u}}$ on a alors $f(x) \geq A$. Cela démontre le lemme. \square

Lemme C.2. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions convexes sur \mathbb{R}^d qui converge uniformément sur les compacts vers une fonction convexe f . Si f admet un minimum global strict ρ , alors, pour tout n assez grand, la fonction f_n admet un minimum global ρ_n qui tend vers ρ quand n tend vers l'infini.*

Démonstration. Sans perdre en généralité, on peut supposer que le minimum ρ de la fonction f est atteint en 0. Soient $r > 0$ et $\alpha = \min_{x \in S(0,r)} f(x) > f(0)$. Posons $\delta = \frac{\alpha - f(0)}{3}$. Puisque la suite (f_n) converge vers f uniformément sur les compacts, pour tout n assez grand on a

$$f_n(0) \leq f(0) + \delta < \alpha - \delta \leq \min_{x \in S(0,r)} f_n(x),$$

et comme f_n est convexe cela implique que $f_n(x) > f_n(0)$ quel que soit $x \notin B(0, r]$. Donc le minimum ρ_n de f_n sur $B(0, r]$ est un minimum global. Cela nous apprend que, pour tout n assez grand, la fonction f_n possède un minimum global ρ_n et qu'en outre, pour tout $r > 0$, il existe un rang à partir duquel toutes les fonctions f_n atteignent leur minimum global dans la boule $B(0, r]$. On peut donc choisir une suite de points (p_n) qui tend vers 0 telle que $f_n(p_n) = \rho_n$, et l'on en déduit que $\lim \rho_n = \lim f_n(p_n) = f(0) = \rho$, car la suite (f_n) converge vers f uniformément sur les compacts. \square

Bibliographie

- [1] Bañuelos, R. and Smits, R.G. (1997). Brownian motion in cones. *Probab. Theory Relat. Fields* **108** : 299–319.
- [2] Billingsley, P. (1999). *Convergence of Probability Measures*, 2nd ed. Wiley, New York.
- [3] Bolthausen, E. (1976). On a functional central limit theorem for random walks conditioned to stay positive. *Ann. Probab.* **4** (3) : 480–485.
- [4] Borovkov, A. A. (1970). Factorization identities and properties of the distribution of the supremum of sequential sums. *Theor. Probability Appl.* **15** : 359–402.
- [5] Burdzy, K. (1985). Brownian paths and cones. *Ann. Probab.* **13** : 1006–1010.
- [6] Burdzy, K. (1986). Brownian excursions from hyperplanes and smooth surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **295** (1) : 35–57.
- [7] Breiman, L. (1968). *Probability*. Addison-Wesley.
- [8] Carslaw, H. and Jaeger, J. (1959). *Conduction of Heat in Solids*. Oxford University Press.
- [9] Chung, K. L. and Zhao, Z. (2001). *From Brownian Motion to Schrödinger's Equation*, 2nd ed. Springer, Berlin.
- [10] Durrett, R. T., Iglehart, D. L. and Miller, D. R. (1977). Weak convergence to brownian meander and brownian excursion. *Ann. Probab.* **5** (1) : 117–129.
- [11] Durrett, R. T. (1995). *Probability : Theory and Examples*, 2nd ed. Duxbury Press.
- [12] Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol 2*. Wiley, New York.
- [13] Fouks, J-D., Lesigne, E. et Peigné, M. (2006). Étude asymptotique d'une marche aléatoire centrifuge. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **42** (2) : 147–170.
- [14] Garbit, R. (2007). Temps de sortie d'un cône pour une marche aléatoire centrée. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **345** (10) : 587–592, 2007.
- [15] Guivarc'h, Y. et Liu, Q. (2001). Propriétés asymptotiques des processus de branchement en environnement aléatoire. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **332** (4) : 339–344.
- [16] Greenwood, P. and Perkins, E. (1983). A conditioned limit theorem for random walk and Brownian local time on square root boundaries. *Ann. Probab.* **11** (2) : 227–261.
- [17] Hall, P. and Heyde, C. C. (1980). *Martingale Limit Theory and Its Application*. Academic Press, San Diego.
- [18] Iglehart, D. L. (1974). Functional central limit theorems for random walks conditioned to stay positive. *Ann. Probab.* **2** (4) : 608–619.
- [19] Iglehart, D. L. (1974). Random walks with negative drift conditioned to stay positive. *J. Appl. Probab.* **11** : 742–751.

- [20] Ito, K. and McKean, H. P. (1974). *Diffusion Processes and Their Sample Paths*, 2nd ed. Springer, Berlin.
- [21] Le Page, E. and Peigné, M. (1997). A local limit theorem on the semi-direct product of \mathbb{R}^{*+} and \mathbb{R}^d . *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **33** (2) : 223–252.
- [22] Le Page, E. and Peigné, M. (1999). Local limit theorems on some non-unimodular groups. *Rev. Mat. Iberoamericana* **15** (1) : 117–141.
- [23] Neveu, J. (1970). *Bases mathématiques du calcul des probabilités*. Masson, Paris.
- [24] Neveu, J. (1975). *Discrete-Parameter Martingales*. North-Holland, Amsterdam.
- [25] Port, S. C. and Stone, C. J. (1978). *Brownian Motion and Classical Potential Theory*. Academic Press, New York.
- [26] Shimura, M. (1983). A class of conditional limit theorems related to ruin problem. *Ann. Probab.* **11** : 40–45.
- [27] Shimura, M. (1984). A limit theorem for two-dimensional conditioned random walk. *Nagoya Math. J.* **95** : 105–116.
- [28] Shimura, M. (1985). Excursions in a cone for two-dimensional Brownian motion. *J. Math. Kyoto Univ.* **25** (3) : 433–443.
- [29] Shimura, M. (1991). A limit theorem for two-dimensional random walk conditioned to stay in a cone. *Yokohama Math. J.* **39** : 21–36.
- [30] Skorokhod, A. V. (1957). Limit theorems for stochastic processes with independent increments. *Teor. Veroyatnost. i. Primenen* **2** : 145–177.
- [31] Spitzer, F. (1960). A Tauberian theorem and its probability interpretation. *Trans. Amer. Math. Soc.* **94** : 150–169.
- [32] Varopoulos, N. Th. (1996). Analysis on Lie groups. *Rev. Mat. Iberoamericana* **12** (3) : 791–917.
- [33] Varopoulos, N. Th. (1999). Potential theory in conical domains. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **125** (2) : 335–384.
- [34] Watson, G. N. (1944). *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd ed. Cambridge University Press.
- [35] Wendel, J. G. (1980). Hitting spheres with Brownian motion. *Ann. Probab.* **8** (1) : 164–169.
- [36] Williams, D. (1970). Decomposing the Brownian path. *Bull. Amer. Math. Soc.* **76** : 871–876.

Résumé Dans la première partie de cette thèse, nous étudions un modèle de marche aléatoire centrifuge. Nous démontrons une loi du logarithme itéré pour sa norme, et nous obtenons la loi asymptotique des fluctuations de sa direction. Nous donnons ensuite un encadrement du taux de décroissance exponentielle de la probabilité qu'elle se trouve à l'instant n dans un compact fixé en montrant que la probabilité qu'une marche aléatoire centrée classique retourne dans un compact à l'instant n sans quitter un cône ne décroît pas à vitesse exponentielle.

Dans la seconde partie, nous étudions le mouvement brownien de dimension quelconque, conditionné à rester dans un cône de révolution pendant une unité de temps, et nous en déduisons un principe d'invariance pour une marche aléatoire conditionnée à rester dans un cône.

Mots clés : Marche aléatoire centrifuge, mouvement brownien conditionné, théorèmes limite.

Abstract In the first part of this thesis, we study a model of centrifugal random walk. We prove a Law of Iterated Logarithm for its norm, and find the asymptotic law of the fluctuations of its direction. We then give upper and lower bounds for the exponential decay of the probability that the centrifugal random walk visits a fixed compact set at time n ; this is achieved by proving that the probability that a centered random walk visits a compact set at time n without having left a cone does not decrease exponentially.

In the second part, we study the multidimensional Brownian motion conditioned to stay in a circular cone for a unit of time, and derive an Invariance Principle for a random walk conditioned to stay in a circular cone.

Key words : Centrifugal random walk, conditioned Brownian motion, limit theorems.